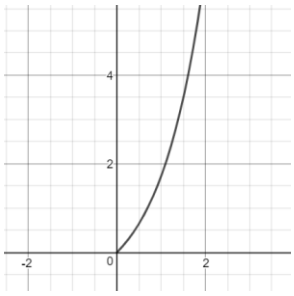
Il grafico riportato nella figura seguente potrebbe rappresentare l'andamento della velocità con cui una carica puntiforme si allontana per repulsione elettrostatica da un'altra carica puntiforme, fissa, di eguale segno? Motiva la tua risposta.



SVOLGIMENTO, IN PIÙ IPOTESI

Il quesito è poco chiaro e, di conseguenza si è costretti a fare congetture.

1. Non sono indicate variabili sugli assi, quindi il grafico rappresenta una funzione numerica, non una velocità. La risposta è NO.

2. Oppure: ammettiamo che la mancanza dell'indicazione delle variabili e delle unità sia "una svista". La formulazione del quesito pare indicare che in ordinate vi debba essere la velocità e in ascisse o la distanza dal punto di partenza o il tempo trascorso dall'istante in cui $v = 0$.
In entrambi i casi, il fatto che la pendenza del grafico sia crescente contrasta con l'ipotesi di una forza che diminuisce di intensità al crescere della distanza. Quindi la risposta è NO.

3. Oppure: se gli assi fossero scambiati e in ordinate fosse la distanza, il grafico sarebbe più credibile, salvo che la tangente nell'origine dovrebbe essere orizzontale. Anche in questo caso la risposta è NO.

Più in dettaglio: supponiamo che la carica sia inizialmente ferma a una distanza r_0 dalla carica fissa. Dalla relazione[1]:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) \tag{1}$$

si ottiene:

$$v \propto f(r) = \sqrt{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}}.$$

La derivata di $f(r)$ è:

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2r^2\sqrt{\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}}} \qquad \text{e} \qquad \lim_{r \to r_0^+} f' = +\infty.$$

Se ipotizziamo che in ordinate si rappresenti il rapporto $(r - r_0)/\, r_0$, dove r è la distanza tra le cariche ($r \geq r_0$), mentre in ascisse si ponga il valore numerico della velocità: $v/(\mathrm{ms}^{-1})$, dobbiamo avere una curva con tangente orizzontale nell'origine.

4. Oppure: il tempo in ordinate. In questo caso la tangente alla curva nell'origine non dovrebbe più essere orizzontale (perché l'accelerazione iniziale non è nulla) e la curva dovrebbe presentare un asintoto verticale, in quanto la velocità tende a un valore limite finito:

$$\lim_{t \to +\infty} v = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 m r_0}}.$$

[1] Con m, ovviamente, abbiamo indicato la massa della particella carica. La relazione scritta esprime la conservazione dell'energia.

Dal grafico è difficile capire se vi sia questo asintoto. Forse sì, forse no. La risposta alla domanda del quesito sarebbe corrispondente: SI (potrebbe) se vi è un asintoto verticale, NO in caso contrario[2].

UN'«ESEGESI» PIÙ APPROFONDITA

La conclusione alla quale siamo giunti con l'ipotesi (4) può lasciare insoddisfatti. Perciò, per i più coraggiosi, ecco una dose supplementare di elaborazione con una buona quantità di matematica.

Assumiamo ancora, come in (4), che siano riportate velocità in ascisse e tempo in ordinate.
Visto che sugli assi <u>non</u> sono riportate unità di misura, proviamo ad usare variabili adimensionate.
Partendo dalla (1):

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

posto:

$$v_\infty = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 m r_0}}$$

Introduciamo, dunque, le variabili:

$$\rho \equiv \frac{r}{r_0}, \qquad \beta \equiv \frac{v}{v_\infty} \quad \left(v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t};\ \beta \in [0; 1]\right) \qquad \text{e} \qquad \tau \equiv \frac{t}{\left(\frac{r_0}{v_\infty}\right)} = \frac{v_\infty t}{r_0}.$$

Nelle nuove variabili la (1) diventa:

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\rho} \qquad \text{ossia} \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2}$$

L'equazione che descrive la forza repulsiva elettrostatica,

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

diventa:

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2}. \tag{3}$$

Da (2) e (3) si ha:

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2}(1-\beta^2).$$

Integrando:

$$\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}\beta}{1-\beta^2} = \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}\tau}{2} \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{1+\beta}{1-\beta}\right| = \tau.$$

Si ottiene quindi:

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = e^\tau \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{e^\tau - 1}{e^\tau + 1} = \tanh\left(\frac{\tau}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \tau = 2\tanh^{-1}\beta$$

Poiché $\beta = \frac{d\rho}{d\tau}$, integrando ancora si può ricavare l'equazione oraria del moto

$$\int_0^\tau \mathrm{d}\rho = \rho(\tau) - 1 = \int_0^\tau \tanh\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}\tau = 2\ln\cosh\left(\frac{\tau}{2}\right) \qquad (\rho_0 = 1)$$

Il grafico della funzione $\tau = 2\tanh^{-1}\beta$ presenta un andamento simile a quello del grafico del quesito, salvo che quest'ultimo parrebbe (?) avere un asintoto in corrispondenza dell'ascissa $\beta = 2$ invece che in $\beta = 1$.

Per accontentare tutti, in particolare – si spera – l'estensore del Quesito n. 7, si può modificare la definizione della variabile β, "normalizzandola" come $\beta \equiv \frac{v}{\left(\frac{v_\infty}{2}\right)}$; il che equivale a sostituire β con $\frac{\beta}{2}$.

Così si ottiene (cfr. Fig. 1, 2)[3]:

[2] In tutto questo abbiamo ragionato – come faremo anche in seguito – ipotizzando che il problema si possa trattare in modo non relativistico e che, comunque, l'irraggiamento della carica accelerata sia trascurabile.

$$\tau = 2 \tanh^{-1}\left(\frac{\beta}{2}\right).$$

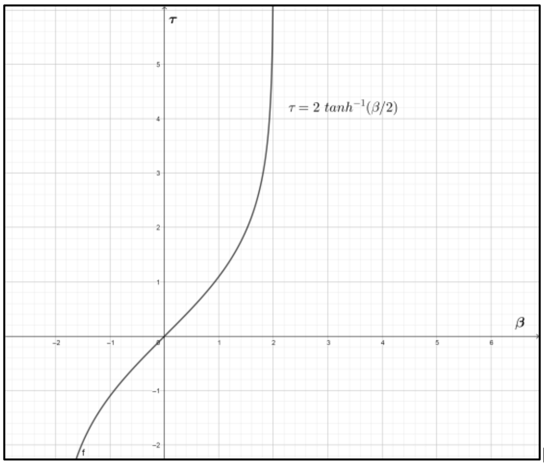


Fig. 1

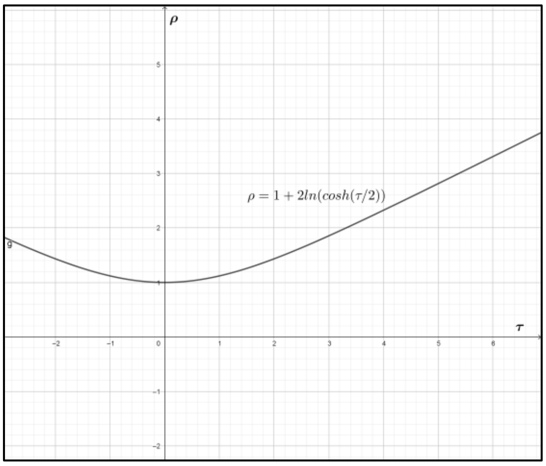


Fig.2

Giunti a questo punto, è il caso di chiedersi: non avranno per caso pensato che uno studente dovesse produrre un tale lavorio, un tale sforzo esegetico al solo fine di dare coerenza e significato ad un testo così nebuloso, vago e confuso? Inoltre quali abilità, conoscenze possono essere valutate, desunte dallo svolgimento o dal non svolgimento di un quesito siffatto?

[3] Come si può notare dalla Figura 1, in corrispondenza di $\beta = 1{,}5$ si ha $\tau \cong 2$. Nel grafico del testo, invece, all'ascissa 1,5 corrisponde un valore vicino a 3,5. Alla cosa si potrebbe ovviare con un cambiamento di scala *ad hoc*, consistente in un opportuno moltiplicatore numerico per la variabile τ. La trasformazione, però, risulterebbe del tutto innaturale.