

Quesito 7

Testo

Una sfera di massa m urta centralmente a velocità v una seconda sfera, avente massa $3m$ ed inizialmente ferma.

- Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che l'urto sia perfettamente elastico
- Stabilire le velocità delle due sfere dopo l'urto, nell'ipotesi che esso sia completamente anelastico. Esprimere, in questo caso, il valore dell'energia dissipata.

Soluzione

Poiché l'urto è centrale, il problema è unidimensionale: il moto dei centri di ciascuna delle due le sfere, si svolge sempre sulla stessa retta r .

Si presume che il sistema sia isolato oppure non intervengano, nell'urto, forze esterne impulsive, per cui si conserva la quantità di moto.

- Se l'urto è elastico si conserva anche l'energia totale.

Dette v_1 e v_2 le componenti delle velocità delle due sfere lungo r dopo l'urto:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}3mv_2^2 \\ mv = mv_1 + 3mv_2 \end{cases}$$

Dopo aver diviso entrambe le equazioni per m e moltiplicato la prima per 2, otteniamo un sistema semplificato

$$\begin{cases} v^2 = v_1^2 + 3v_2^2 \\ v = v_1 + 3v_2 \end{cases}$$

Ricaviamo v_1 dalla seconda e inseriamolo nella prima ottenendo

$$v_1 = v - 3v_2$$

$$v^2 = (v - 3v_2)^2 + 3v_2^2 \Rightarrow 0 = 6v_2(2v_2 - v) \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2}v$$

Abbiamo direttamente scartato la soluzione $v_2 = 0$ che rappresenta il caso in cui l'urto non avviene.

Risolvendo ora per v_1 otteniamo

$$v_1 = v - 3v_2 = -\frac{1}{2}v_2$$

La sfera più leggera torna quindi indietro con una velocità di modulo pari alla metà di quella iniziale.

- Nel caso di urto completamente anelastico, si conserva solo la quantità di moto e le due sfere rimangono attaccate, muovendosi dopo l'urto con velocità v' .

$$mv = 4mv' \Rightarrow v' = \frac{1}{4}v$$

L'energia cinetica finale è

$$K_f = \frac{1}{2}4mv'^2 = \frac{1}{2}4m \left(\frac{1}{4}v\right)^2 = \frac{1}{8}mv^2$$

L'energia cinetica dissipata è pari a

$$|K_f - K_i| = \left| \frac{1}{8}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 \right| = \frac{3}{8}mv^2$$