

Un elettrone si muove, partendo da fermo, in un campo elettrico uniforme di intensità $E=10\text{kV/cm}$. Descrivi il procedimento che adatteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo.¹

Interpretiamo la frase: «Descrivi il procedimento che adatteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo» come: «calcola in quale istante...».

Indichiamo con m la massa (a riposo) dell'elettrone, con e la carica, con K l'energia cinetica e con

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
 il fattore di Lorentz.

L'energia totale è $E = \gamma mc^2 = mc^2 + K$ e, se deve essere $K = mc^2$, bisogna che sia $\gamma = 2$.

Questo porta subito a ricavare: $\beta^2 \equiv \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$ ovvero: $v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$.

Inoltre, detto E il campo elettrico, la forza agente sull'elettrone vale $F = Ee$ e quindi l'accelerazione iniziale vale $a_0 = \frac{Ee}{m}$.

UN PRIMO MODO

Il moto dell'elettrone è regolato dall'equazione:

$$F = \frac{dp}{dt} = ma_0.$$

dove la quantità di moto dell'elettrone ha modulo pari a:

$$p = \gamma mv.$$

Abbiamo dunque:

$$dp = ma_0 dt$$

$$\int_0^p dp = ma_0 \int_0^t dt$$

$$p = \gamma mv = ma_0 t.$$

Se ora esplicitiamo t e sostituiamo $v = \beta c = \frac{\sqrt{3}}{2} c$, otteniamo:

$$t = \frac{\gamma v}{a_0} = \frac{\gamma \beta mc}{Ee} = 2 \frac{\sqrt{3} mc}{2 Ee} = 3 \text{ ns}.$$

UN ALTRO MODO

Per definizione (valida sia in fisica classica che relativistica) un moto "uniformemente accelerato" è un moto con accelerazione propria costante. Per accelerazione propria si intende l'accelerazione misurata nel riferimento K' rispetto al quale la particella è in quiete ($v = 0$).

«Il sistema K' cambia istante per istante; per un sistema galileiano K prescelto, l'accelerazione di un tale moto non è costante nel tempo»².

Quindi in K' si ha per la variazione di velocità dv ($d\tau$ è un intervallo di tempo proprio):

¹ Abbiamo trascritto il testo come nell'originale. Ovviamente, si dovrebbe scrivere: $E = 10 \text{ kV/cm}$.

² W. Pauli. *Teoria della relatività*, Bollati Boringhieri, Torino 2008, p. 124.

$$dv = a_0 d\tau.$$

Integrando:

$$\int_0^\tau dv = a_0 \int_0^\tau d\tau \Rightarrow v = a_0 \tau.$$

Passando al riferimento K , per il tempo t necessario per raggiungere la velocità v si avrà, in accordo con la relazione per la dilatazione dei tempi:

$$\tau = \frac{t}{\gamma} \equiv t \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Quindi:

$$v = \frac{a_0 t}{\gamma} = \frac{\frac{eE}{m} t}{\gamma}$$

$$t = \frac{m\gamma v}{eE} = \frac{mc\beta\gamma}{eE} = \frac{mc}{eE} \sqrt{3} = 3 \text{ ns.}$$

UN TERZO MODO

Dall'equazione della velocità nel moto iperbolico³:

$$v(t) = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + \frac{a_0^2 t^2}{c^2}}}, \quad (1)$$

dividendo ambo i membri per c , posto $X = \frac{a_0^2 t^2}{c^2}$ e tenuto conto che, come detto sopra, deve essere $\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$, con pochi passaggi si ottiene $X = 3$.

Da qui, risolvendo per t , si ricava rapidamente:

$$t = \sqrt{3} \frac{mc}{Ee} = 3 \text{ ns}$$

che è il tempo di volo richiesto.

COMMENTI

– Chi mai si può permettere di trattare questo argomento (moto relativistico di una particella soggetta a una forza costante, alias “moto iperbolico”) in un corso scolastico di ordinamento? Gli studenti possono anche intuire, dall'esistenza di una velocità limite, come il moto “uniformemente accelerato” che hanno studiato in cinematica classica non possa esistere in relatività ristretta. Ma poi arrivare a dedurre l'andamento di $v(t)$ sembra una pretesa eccessiva. Nondimeno, nel *Quadro di Riferimento per la seconda prova d'esame* (MIUR, 26.11.2018) si legge: «Determinare e discutere il moto relativistico di un punto materiale sotto l'azione di una forza costante o di una forza di Lorentz». Sta di fatto che attualmente nessuno dei testi scolastici in commercio tratta l'argomento.

– Supponiamo che il testo non richiedesse di calcolare esplicitamente t . Si potrebbe pensare di aver risposto correttamente alla richiesta avendo scritto la (1) e avendo semplicemente indicato di dover ricavare t da quella sotto la condizione $v^2 = \frac{3}{4} c^2$?

³ Per esempio: L. Landau, E. Lifchitz. *Théorie du Champ*, MIR, Mosca 1966, p. 32. Questa soluzione è al di fuori delle possibilità di uno studente di liceo, perché è praticamente impossibile che conosca (e, se mai, ricordi) l'equazione (1). La riportiamo, tuttavia, perché – se si conosce quella relazione – è possibile arrivare al risultato richiesto con soli passaggi algebrici.

– Nei primi due modi di risoluzione presentati qui, è richiesta l'integrazione di un'equazione differenziale. Si osserva che, benché l'argomento delle equazioni differenziali sia presente nelle *Indicazioni nazionali* per la Matematica, esso non è citato nel *Quadro di riferimento*.

– Oppure si voleva solamente l'indicazione di un'ipotetica procedura sperimentale? In questo caso, si potrebbe trovare la distanza di volo s ricavandola dall'espressione $Ee \cdot s = \Delta K = mc^2$ e suggerire di misurare il tempo di volo corrispondente. L'idea di una misura del tempo di volo su una distanza preventivamente determinata in base alle condizioni del quesito potrebbe forse essere suggerita allo studente dall'aver visto il filmato sull'esperimento di Bertozzi?⁴ La procedura per eseguire questa misura, però, non sarebbe semplice: per poter determinare l'istante di partenza bisognerebbe avere un fascio opportunamente pulsato (non certo un singolo elettrone) e, immaginando di usare un oscilloscopio, bisognerebbe ricorrere a un modello avanzato perché si devono risolvere pochi nanosecondi (costo almeno 3000÷4000 €).

Oltre a ciò, l'energia cinetica degli elettroni, mc^2 , è di circa 500 keV. Più di quanto si può ottenere con un tubo per raggi X...

– Questo quesito, come è stato rilevato, è ripreso da un esercizio (3.375) del testo: I. E. Irodov. *Problems in General Physics*, MIR, Mosca 1981. Il testo originale, in realtà, era formulato in modo non ambiguo: «How soon after the start will the kinetic energy of the electron become equal to its rest energy?»

⁴ Cfr. film PSSC: W. Bertozzi. *La velocità limite. Una ricerca con elettroni di alta energia*, MIT, Boston 1963
https://www.youtube.com/watch?v=FV1_K6uT1ac