

Un punto materiale si muove nel piano xy secondo la legge oraria:

$$x = a \cdot \text{sen}(\omega t), \quad y = a(1 - \text{cos}(\omega t)),$$

con a e ω costanti positive. Determina la distanza del punto dall'origine al tempo $t = \tau$ e le direzioni dei vettori velocità e accelerazione all'istante $t = 0$.

RISOLUZIONE

All'istante $t = \tau$, la distanza del punto dall'origine è:

$$d = \sqrt{x^2(\tau) + y^2(\tau)} = a\sqrt{2[1 - \text{cos}(\omega\tau)]} = 2a \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

Derivando rispetto al tempo le due espressioni che forniscono la legge del moto, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\omega \text{cos}(\omega t), & \dot{y} &= a\omega \text{sin}(\omega t) \\ \ddot{x} &= -a\omega^2 \text{sin}(\omega t), & \ddot{y} &= a\omega^2 \text{cos}(\omega t). \end{aligned}$$

Perciò, all'istante iniziale:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\omega, & \dot{y} &= 0 \\ \ddot{x} &= 0, & \ddot{y} &= a\omega^2, \end{aligned}$$

ovvero il vettore velocità è diretto (e orientato) come l'asse delle x , mentre il vettore accelerazione è diretto e orientato come l'asse delle y .

IN ALTERNATIVA, SENZA CALCOLARE DERIVATE

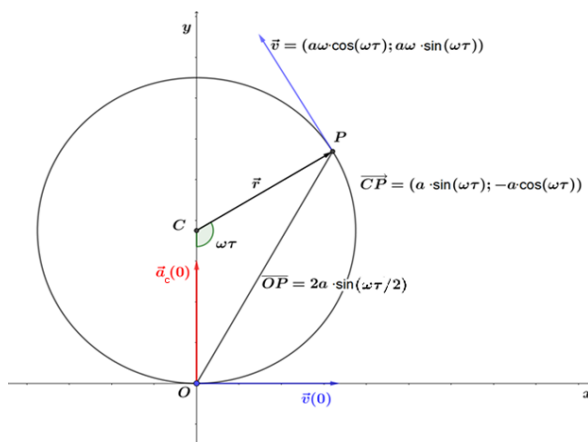
Scriviamo le equazioni date dal testo nella forma:

$$\begin{cases} x = a \sin \omega t \\ y - a = -a \cos(\omega t). \end{cases}$$

Da qui, quadrando e sommando, abbiamo subito:

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

La traiettoria è, dunque, una circonferenza di raggio a e centro $C = (0; a)$.



Si tratta di un moto circolare uniforme. Il raggio vettore $\vec{r} = \overline{CP} = (x; y - a)$ ruota attorno a C con velocità angolare ω costante.

Come si vede dal grafico, la distanza del punto dall'origine al tempo $t = \tau$ vale $\overline{OP} = 2a \sin(\omega\tau/2)$.

Il vettore velocità \vec{v} all'istante $t = 0$ ha la direzione e verso dell'asse delle x ; il vettore dell'accelerazione \vec{a}_c , centripeta, è diretto sempre verso il centro C della circonferenza e quindi, all'istante $t = 0$, ha la direzione e il verso dell'asse delle y .

COMMENTI

Questo quesito, come è stato rilevato, è ripreso da un esercizio (1.26) del testo: I. E. Irodov. *Problems in General Physics*, MIR, Mosca 1981. Tuttavia le domande sono stati riformulate per renderle più facili.

Apparentemente, il quesito è pensato per far calcolare qualche semplice derivata. In realtà, se si riconosce in quello descritto un moto circolare uniforme, il quesito si rivela ancora più elementare.