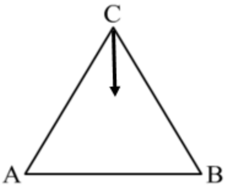
Tre cariche puntiformi di valore q sono poste ai vertici del triangolo equilatero ABC, i cui lati misurano 1m.
a) Determina l'energia potenziale del sistema.
b) La carica collocata in C viene spostata verso il segmento AB lungo la perpendicolare ad AB; traccia il grafico dell'andamento dell'energia potenziale del sistema in funzione della distanza della carica dal segmento AB.



a) Indichiamo con r la lunghezza del lato del triangolo. L'energia potenziale del sistema, posto lo zero nello stato in cui le cariche sono infinitamente distanti, si determina immediatamente come:

$$U = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = \frac{3q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

b) Supponiamo ora che la carica inizialmente in *C* si trovi sull'asse del segmento *AB*, in un punto a generica distanza x dall'asse stesso. Rispetto all'espressione scritta sopra per U, si avrà il primo addendo immodificato, mentre per U_{AC} e U_{BC} varrà la nuova espressione:

$$U_{AC} = U_{BC} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + r^2/4}}.$$

In definitiva:

$$U(x) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + r^2/4}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + r^2/4}}\right).$$

Per tracciare l'andamento desiderato, possiamo esaminare la funzione:

$$y = r\left(\frac{1}{r} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + r^2/4}}\right) = 1 + \frac{2}{\sqrt{X^2 + 1/4}},$$

dove, ovviamente, abbiamo posto $X = x/r$.

La funzione $y(X)$ è pari ed è sempre positiva, basterà quindi individuarne l'andamento nel primo quadrante.

Se consideriamo la derivata prima:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}X} = \frac{-2X}{(X^2 + 1/4)^{\frac{3}{2}}}$$

vediamo subito che è sempre positiva nel primo quadrante, salvo per $X = 0$, dove si annulla.

Inoltre si ha:

$$\lim_{X\to\infty} y = 1.$$

In definitiva, quindi, la y ha un massimo ($y = 5$) per $X = 0$ e ha per asintoto orizzontale la retta $y = 1$.

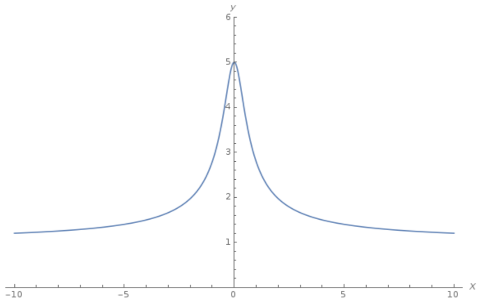
Se consideriamo la derivata seconda:

A CURA DI A.I.F. – ASSOCIAZIONE PER L'INSEGNAMENTO DELLA FISICA

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}X^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\left(\frac{-2X}{(X^2+1/4)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{16(8X^2-1)}{(4X^2+1)^{\frac{5}{2}}},$$

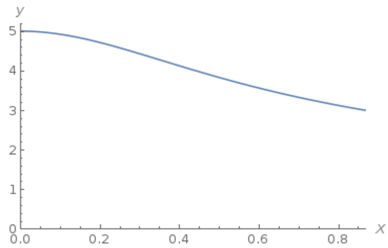
possiamo verificare che si annulla per $X = \pm\sqrt{2}/4 \cong \pm 0{,}35$. Nei punti corrispondenti la curva presenta un flesso.

Si può, ora disegnare il grafico:



Questo fornisce l'andamento dell'energia potenziale al variare della distanza da *AB* della carica mobile, tramite le variabili adimensionali X e $y = U/U_0$ ($U_0 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ rappresenta l'energia potenziale delle due cariche fisse).

Si consideri, però, che se la carica mobile è limitata a spostarsi tra *C* e il punto medio di *AB*, deve essere $\sqrt{3}/2 \geq X \geq 0$ e, quindi, bisogna considerare soltanto quell'intervallo ($\sqrt{3}/2 \cong 0{,}87$).



COMMENTI

Questo quesito, nella prima parte, riprende esercizi comunemente proposti nei libri di testo. La seconda parte porta a svolgere un semplice studio di funzione. C'è da attendersi, però, che gli studenti non siano abituati a prestare attenzione all'opportunità di individuare variabili adimensionali…

Vi è un paio di errori di scrittura nel testo:

- 1m al posto di 1 m (manca lo spazio)
- nella figura, i punti sono indicati in carattere tondo e con grazie. Poi, nel testo, per indicare il triangolo e la sua base si usa il corsivo, mentre il solo vertice è scritto in tondo (C). Benché non esista una convenzione ufficiale, per coerenza sarebbe opportuno scrivere tutti questi simboli in corsivo – oppure tutti in tondo, ma, per distinguerli dal resto del testo, con un carattere senza grazie.