La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione: $x = \alpha t(1 - \beta t)$, dove α e β sono due costanti, con $\beta > 0$.
Determina:
a) la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;
b) l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.

RISOLUZIONE

a) Velocità e accelerazione si ottengono dalla legge oraria data, derivando rispetto al tempo:

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha t(1 - \beta t)] = \alpha(1 - 2\beta t)$$

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\alpha(1 - 2\beta t)] = -2\alpha\beta.$$

Ma, anche senza calcolare le derivate, si può riscrivere l'espressione data dal testo come:

$$x = -\frac{1}{2} \cdot (2\alpha\beta)t^2 + \alpha t$$

nella quale si riconosce subito la legge oraria di un moto uniformemente vario di accelerazione $-2\alpha\beta$ e velocità iniziale α. Ne viene quindi: $v = at + v_0 = -2\alpha\beta t + \alpha = \alpha(1 - 2\beta t)$.

b) All'istante iniziale, $t = 0$, la particella si trova nell'origine, $x = 0$. La medesima posizione sarà di nuovo raggiunta quando $x = 0$ con $t \neq 0$. L'equazione oraria permette allora di ricavare:

$$1 - \beta t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\beta}.$$

In sostanza, l'intervallo di tempo richiesto è: $\Delta t = t - 0 = 1/\beta$.

Per rispondere alla seconda domanda di questo punto (b), bisogna tenere conto del fatto che la velocità non ha sempre il medesimo segno in tutto l'intervallo di tempo Δt. Per l'esattezza, supposto $\alpha > 0$:

$$v \geq 0 \quad \text{per} \quad t \leq \frac{1}{2\beta}$$

$$v < 0 \quad \text{per} \quad t > \frac{1}{2\beta},$$

mentre – per gli stessi intervalli di tempo – valgono le relazioni $v \leq 0$ e $v > 0$ nel caso in cui sia $\alpha < 0$.
Il percorso totale è, comunque, formato da un primo tratto di allontanamento dall'origine e da un secondo tratto di riavvicinamento all'origine, entrambi di lunghezza s.

Si può allora ottenere la lunghezza del percorso, s', dall'equazione:

$$s' = 2s = 2(-|\alpha|\beta t^2 + |\alpha|t)$$

dove $t = \frac{1}{2\beta}$. Questo fornisce:

$$s = -\frac{-2|\alpha|\beta}{4\beta^2} + \frac{2|\alpha|}{2\beta} = \frac{|\alpha|}{2\beta}.$$

A CURA DI A.I.F. – ASSOCIAZIONE PER L'INSEGNAMENTO DELLA FISICA

COMMENTI

Questo quesito, come è stato rilevato, è ripreso da un esercizio (1.20) del testo: I. E. Irodov. *Problems in General Physics*, MIR, Mosca 1981. Nel testo originale il problema è posto, però, in forma vettoriale: in sostanza, qui è stato semplificato.

Si può vedere qualche difficoltà soltanto nell'ultima domanda, perché lo studente deve capire come calcolare la lunghezza del percorso nel moto di andata e ritorno. Gli aspetti matematici si riassumono nel calcolo di due semplici derivate, il che ci può stare in un quesito di Matematica e Fisica: un'osservazione preliminare dell'equazione oraria, però, può evitare del tutto il calcolo esplicito.