Assegnato un numero reale positivo k, considerare le funzioni f e g così definite:

$$f(x) = \sqrt{x}\,(k - x) \qquad\qquad g(x) = x^2(x - k).$$

1. Provare che, qualunque sia $k > 0$, nell'intervallo $[0, k]$ il grafico di f ha un unico punto di massimo $F(x_F\,, y_F)$ ed il grafico di g ha un unico punto di minimo $G(x_G\,, y_G)$. Verificare che si ha $x_G = 2x_F$ e $y_G = -(y_F)^2$.
2. Verificare che, qualunque sia $k > 0$, i grafici delle due funzioni sono ortogonali nell'origine, vale a dire che le rispettive rette tangenti in tale punto sono tra loro ortogonali. Determinare per quale valore positivo di k i due grafici si intersecano ortogonalmente anche nel loro ulteriore punto comune.

D'ora in avanti, assumere $k = 1$. In un riferimento cartesiano, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), l'unione degli archi di curva di equazioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, per $x \in [0, 1]$, rappresenta il profilo di una spira metallica. Sia S la regione piana delimitata da tale spira.

3. Supponendo che nella regione S sia presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare al piano di S, avente intensità $B_0 = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ T, verificare che il valore assoluto del flusso di tale campo attraverso S è pari a $7{,}0 \cdot 10^{-3}$ Wb.
4. Supporre che la spira abbia resistenza elettrica R pari a $70\ \Omega$ e che il campo magnetico, rimanendo perpendicolare al piano di S, a partire dall'istante $t_0 = 0$ s, inizi a variare secondo la legge:
$$B(t) = B_0\, e^{-\omega t} \cos(\omega t), \text{ con } \omega = \pi \text{ rad/s}$$
e $t \geq 0$ espresso in secondi (s). Esprimere l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione di t, specificando in quale istante per la prima volta la corrente cambia verso.
Qual è il valore massimo di tale corrente per $t \geq 0$? Spiegare quale relazione esiste tra la variazione del campo che induce la corrente e il verso della corrente indotta.

SVOLGIMENTO

1) Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si annullano sia nell'origine che per $x = k$. Essendo entrambe continue in $[0; k]$ e derivabili nel corrispondente intervallo aperto $(0; k)$, per il teorema di Rolle devono presentare almeno un punto all'interno di $(0; k)$ nel quale la derivata è nulla. Nello stesso intervallo, inoltre, $f(x) > 0$ mentre $g(x) < 0$; ne consegue che la prima funzione deve presentare almeno un massimo e la seconda almeno un minimo.

Per verificare l'unicità di questi estremi, consideriamo le derivate delle due funzioni:

$$f'(x) = \frac{k - 3x}{2\sqrt{x}}; \qquad g'(x) = x(3x - 2k).$$

La prima si annulla soltanto per $x = x_F = k/3$ ed è quindi confermata l'unicità del punto di massimo. La seconda si annulla per $x = 0$ e per $x = x_G = 2k/3$. È il secondo valore che corrisponde al minimo; per $x = 0$ ritroviamo uno dei punti di massimo assoluto della funzione (nell'intervallo in esame).

È immediato riconoscere che $x_G = 2x_F$. Calcoliamo poi:

$$y_F = f\left(\tfrac{k}{3}\right) = \frac{2k\sqrt{k}}{3\sqrt{3}}; \quad y_G = g\left(\tfrac{2k}{3}\right) = \frac{-4k^3}{27}.$$

Anche qui si riconosce che $y_G = -y_F^2$.

2) Per verificare l'ortogonalità delle due curve nell'origine, esaminiamo i valori di $f'(0)$ e di $g'(0)$. Abbiamo già visto che $g'(0) = 0$. La $f'(x)$ diverge per $x = 0$ e si ha che:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty.$$

Quindi le due tangenti coincidono con gli assi coordinati (e sono tra loro ortogonali).

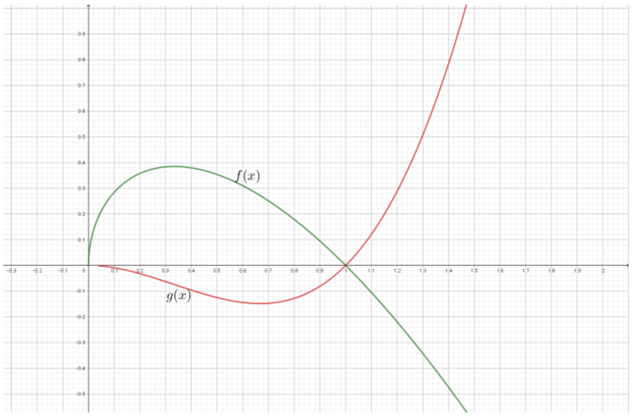
Consideriamo ora $f'(k)$ e $g'(k)$:

$$f'(k) = \frac{k-3k}{2\sqrt{k}} = -\sqrt{k}; \qquad g'(k) = k^2$$

e imponiamo la condizione $f'(k) \cdot g'(k) = -1$. Otteniamo:

$$k^2\sqrt{k} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad k = 1.$$

Rappresentiamo le due curve nella figura qui sotto.



Il periodo finale di questo punto (2) è formulato in modo non corretto. Infatti, se x è una lunghezza e $k = 1$ è un numero, $k - x$ e $x - k$ sono espressioni prive di senso (non si possono sommare/sottrarre quantità non omogenee). Non basta nemmeno supporre che k rappresenti una lunghezza ($k = 1\ \mathrm{m}$): in tal caso, come potrebbero essere due lunghezze anche $\sqrt{x}(k - x)$ e $x^2(x - k)$?

Riformuliamo la frase come segue: «Si considerino due grandezze X e Y, la cui dimensione fisica sia quella di una lunghezza. Stabiliamo che le coordinate x ed y del diagramma cartesiano nel quale sono tracciate le due curve $f(x)$ e $g(x)$ rappresentino i valori numerici, rispettivamente, delle grandezze X e Y espresse in metri. In altre parole: $x = X/\mathrm{m}$, $y = Y/\mathrm{m}$. In questo modo, l'unione degli archi…». Possiamo ora trattare la domanda successiva.

3) L'area della spira indicata può essere determinata tramite il calcolo dei due integrali:

$$\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\mathrm{d}x \qquad \mathrm{e} \qquad -\int_0^1 x^2(x-1)\mathrm{d}x.$$

Svolgendo i calcoli, otteniamo:

$$\int_0^1 \sqrt{x}(1-x)\mathrm{d}x = \frac{2}{15}x\sqrt{x}(5-3x)\bigg|_0^1 = \frac{4}{15};$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Di conseguenza, l'area di S vale:

$$A_S = \left(\frac{4}{15} + \frac{1}{12}\right)\ \mathrm{m}^2 = \frac{7}{20}\ \mathrm{m}^2 = 0{,}35\ \mathrm{m}^2.$$

Perciò il flusso di $\vec{B}_0$ attraverso S vale, in valore assoluto:

$$\left|\Phi_S(\vec{B}_0)\right| = B_0 A_S = (2{,}0 \times 10^{-2} \cdot 0{,}35)\ \mathrm{Wb} = 7{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{Wb}$$

come si chiedeva di verificare.

Per comodità, assumeremo ora che la spira sia orientata concordemente al campo che la attraversa e che, quindi, sia $\Phi_S(\vec{B}_0) = B_0 A_S$.

4) Nelle condizioni indicate, per le leggi di Faraday-Neumann-Lenz e di Ohm, la corrente indotta nella spira è data da:

$$i = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})/\mathrm{d}t}{R}.$$

Poiché:

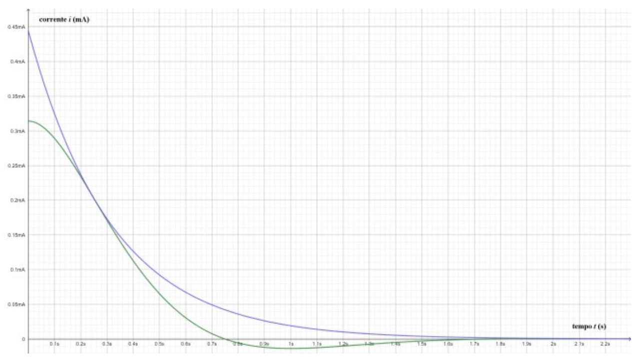
$$-\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -B_0 A_S \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\omega t}\cos(\omega t)\right) = B_0 A_S \omega e^{-\omega t}(\sin(\omega t) + \cos(\omega t)),$$

tenendo conto che $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, la corrente indotta può essere espressa come:

$$i = \frac{\sqrt{2}\omega B_0 A_S}{R} e^{-\omega t} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Questa espressione si annulla quando $\omega t + \frac{\pi}{4} = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}^+$ $(t \geq 0)$. Tenendo conto del valore di ω, questo si traduce nella condizione $t = \left(n - \frac{1}{4}\right)$ s. Il primo istante nel quale la corrente si annulla cambiando verso è perciò $t = 0{,}75$ s.

Qui sotto, in verde, è rappresentata la corrente indotta (in blu il solo termine esponenziale $\frac{\sqrt{2}\omega B_0 A_S}{R} e^{-\omega t}$).



Il valore massimo della corrente si ha all'istante iniziale, a causa della presenza del termine esponenziale decrescente $e^{-\omega t}$ e della periodicità della funzione seno. Tale valore è:

$$i_{\max} = \frac{\omega B_0 A_S}{R} = \frac{\pi \cdot 7{,}0 \times 10^{-3}}{70}\ \mathrm{A} = 0{,}31\ \mathrm{mA}.$$

La corrente indotta è sorgente di un campo magnetico contrapposto alla variazione che l'ha determinata. Ovvero, se il campo variabile diminuisce di intensità, il campo della corrente indotta è concorde con esso; viceversa, il campo indotto è discorde con il campo inducente quando quest'ultimo aumenta di intensità.

COMMENTI

▪ *Punto* 4) – *Ancora sull'uso delle unità di misura*

Nell'espressione di $B(t)$ la costante di smorzamento nell'esponenziale, $e^{-\omega t}$, viene espressa come velocità angolare (unità $\frac{\mathrm{rad}}{s}$).
Sarebbe stato fisicamente più sensato esprimere il valore della grandezza appunto come quello di una costante di decadimento

$$e^{-\lambda t} \text{ con } \lambda = \pi\, s^{-1}$$

Com'è noto, una singola unità derivata SI può essere espressa in modi diversi, combinando tra loro i nomi delle unità di base con nomi speciali di unità derivate. Trattasi di una libertà di espressione algebrica che peraltro deve essere governata da considerazioni fisiche e di buon senso.

Un esempio fondamentale è quello dell'unità SI del radiante:

Grandezza	**Nome**	**Simbolo**	**Espressione in unità SI**
angolo piano	**radiante**	**rad**	**m . m^{-1} = 1**

Nella pratica, con certe grandezze derivate si preferisce usare certi nomi speciali di unità, o combinazioni di nomi di unità, per distinguere tra grandezze di natura differente ma con la stessa dimensione.

Secondo la raccomandazione del CIPM n. 1 del 1980, le unità supplementari di angolo piano ed angolo solido (definite nel 1960 dalla XI CGPM) vanno considerate unità derivate prive di dimensione (il CIPM così si esprime: *CIPM...decide di interpretare la classe delle unità supplementari nel Sistema Internazionale come una classe di unità derivate prive di dimensione, per la quale il CGPM lascia la libertà di usarle o non usarle nelle espressioni delle unità SI derivate"*).[1]

▪ *In generale su questo problema*

La parte riguardante la fisica è veramente residuale ed appiattisce nel giudizio il valore dei candidati "imperocché" … non "lascia ai migliori l'agio di addimostrarsi tali con la scelta dei metodi più spediti ed eleganti e con l'aggiunta di giudiziose osservazioni"[2].

Lo svolgimento del punto 3, per esempio, è subordinato al calcolo precedente dell'area della regione S. Si sarebbe potuto fornirne il valore, dopodiché si sarebbero potute apprezzare - si fa per dire - conoscenze, abilità e competenze nello svolgere una moltiplicazione tra grandezze fisiche per ottenere il flusso richiesto. Ma, in così poco, dove sarebbe possibile ricercare "l'agio"?

Il punto 4 sembra essenzialmente un pretesto per far svolgere il calcolo di una derivata.

---

[1] Sergio Sartori, *Ortografia, grammatica, sintassi e semantica del linguaggio delle misure*
http://oldsite.inrim.it/events/insegnanti/doc/Modulo_2-SI_Sintesi.doc
[2] https://blog.petiteplaisance.it/wp-content/uploads/2017/05/06Sandro-Graffi-La-sezione-fisico-atematica-degli-istituti-tecnici02.pdf#page=9
Dalla relazione della commissione per i temi dell'esame finale della Sezione Fisico-Matematica dell'Istituto Tecnico, presieduta dall'illustre matematico Francesco D'Ovidio (1886).