

1. A infinita distanza dalle due cariche, il campo elettrico da esse generato si annulla. Se però ricerchiamo uno zero a distanza finita da Q_1 e Q_2 , dato che entrambe le cariche sono poste sull'asse delle y , il campo elettrico del quale esse sono sorgenti non si può annullare che in un punto dello stesso asse, dove si annullano le componenti x del campo di ciascuna carica. In tutti i punti fuori dall'asse, invece, queste componenti sono concordi e la loro somma non può essere nulla. Il punto in questione inoltre, poiché le cariche hanno lo stesso segno, deve trovarsi internamente al segmento che unisce le cariche stesse, perché soltanto in quella regione le componenti y dei due campi sono discordi.

Traduciamo quanto ora detto nella condizione:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\frac{4}{y^2} - \frac{1}{(1-y)^2} \right] = 0$$

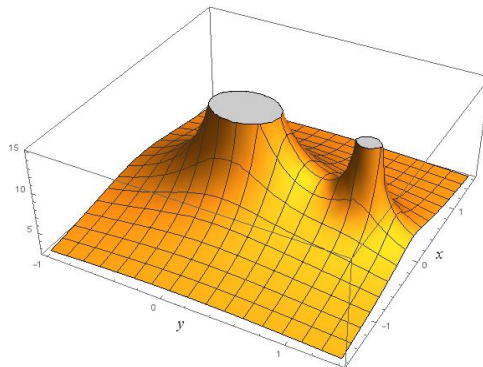
dove r è la distanza tra le due cariche (y è un numero reale compreso tra 0 e 1 che rappresenta la coordinata del punto sull'asse delle ordinate)¹.

Da qui si ha:

$$\begin{aligned} 4(1-y)^2 &= y^2 \\ 2(1-y) &= \pm y \\ y_1 &= \frac{2}{3}; \quad y_2 = 2. \end{aligned}$$

Delle due soluzioni, la seconda ($y_2 = 2$) corrisponde a un punto esterno all'intervallo $[0; 1]$ ed è da scartare. Resta, unica, la prima soluzione, $y_1 = 2/3$. Abbiamo così mostrato che esiste una posizione nella quale il campo è nullo e che tale posizione (a distanza finita dalle sorgenti) è unica.

Perché la posizione individuata sia di equilibrio stabile per un'ipotetica carica in essa collocata, è necessario che un piccolo spostamento da tale posizione corrisponda a una forza di richiamo – tale che tenda, cioè, a riportare la carica nella posizione di partenza. Si capisce facilmente che non è così, ragionando direttamente sulle forze che sarebbero esercitate dalle due cariche sulla terza: si tratta, insomma, di una posizione di equilibrio instabile. Questo è, peraltro, in accordo con quanto stabilito più in generale dal teorema di Earnshaw².



Il grafico qui sopra mostra l'andamento del potenziale elettrico V delle due cariche (avendo posto lo zero all'infinito)³: come si vede, nella regione tra di esse il potenziale presenta una sella. Corrispondentemente, l'energia potenziale avrebbe analogo andamento per una carica positiva in $P \equiv (0; 2/3)$ e andamento ribaltato per una carica negativa. In ogni caso si avrebbe sempre una sella, non un minimo come sarebbe richiesto per un equilibrio stabile.

2. Se la carica Q_2 è collocata in un punto di ascissa x , e ordinata $y = 1$, l'energia potenziale elettrostatica del sistema può essere espressa come:

¹ E_1 ed E_2 sono le componenti nella direzione dell'asse y dei campi generati dalle due cariche.

² Samuel Earnshaw, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **7** 97 (1842)

<https://diego.assencio.com/?index=bc04395b103021d338b4e30a061bfc74>

³ È rappresentata la funzione $z = \frac{4}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+(1-y)^2}}$.

$$\mathcal{U}(x) = \frac{4q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = k \frac{4q^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

In generale, l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva; scrivendola come qui sopra si è, implicitamente, scelto di porre $\mathcal{U} = 0$ a distanza infinita dalla carica Q_1 .

3. Per studiare $\mathcal{U}(x)$, conviene scriverla come:

$$\mathcal{U}(x) = K \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = K \cdot \mathfrak{F}(x)$$

e svolgere tutte le considerazioni opportune su $\mathfrak{F}(x)$, tenendo poi conto del fatto che la presenza del fattore $K > 0$ equivale a una semplice dilatazione sulle ordinate.

Innanzitutto, la $\mathfrak{F}(x)$ è definita in tutto \mathbb{R} ma, poiché si tratta di una funzione pari, basterà studiarla per $x \geq 0$. Inoltre, è immediato riconoscere che $\mathfrak{F}(x)$ risulta sempre positiva. Si ha poi che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathfrak{F}(x) = 0$$

e, conseguentemente, l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale.

La parità della funzione e il valore $\mathfrak{F}(0) = 1 > 0$ assunto nell'origine fanno capire che per $x = 0$ la funzione deve presentare un massimo. L'analisi della derivata prima:

$$\mathfrak{F}'(x) = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

che si annulla soltanto per $x = 0$ indica che non vi siano altri punti di massimo o minimo.

Il calcolo della derivata seconda porta al risultato:

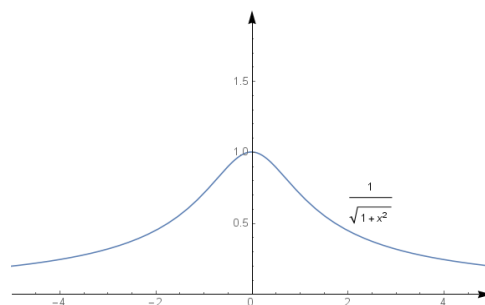
$$\mathfrak{F}''(x) = \frac{2x^2 - 1}{(1+x^2)^{5/2}}$$

e questa si annulla per $x = \sqrt{2}/2$ (e, simmetricamente, per $x = -\sqrt{2}/2$); in corrispondenza di questi valori si ha un flesso. Allora il valore della derivata di $\mathfrak{F}'(x)$ calcolato per $x = \sqrt{2}/2$ fornisce uno dei coefficienti angolari richiesti:

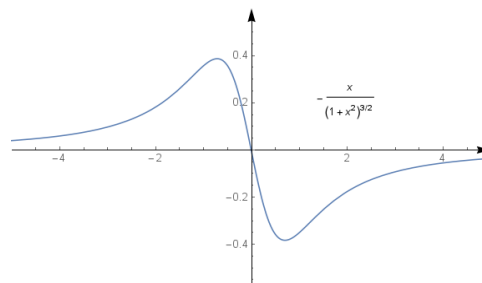
$$a_1 = K \cdot \mathfrak{F}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-2K\sqrt{3}}{9}$$

mentre l'altro coefficiente è, semplicemente, l'opposto: $a_2 = -a_1 = 2K\sqrt{3}/9$.

4. Il grafico di $\mathfrak{F}(x)$ è determinato dalle proprietà stabilite al punto precedente.



La costruzione del corrispondente grafico di $\mathfrak{F}'(x)$ si esegue con facilità, tenendo conto che questa è una funzione dispari i cui punti stazionari corrispondono ai flessi di $\mathfrak{F}(x)$:



Infine, si deve notare che l'integrale richiesto,

$$\int_{-m}^m u'(x)dx$$

è calcolato relativamente a una funzione dispari tra estremi simmetrici e ha, quindi, valore nullo.