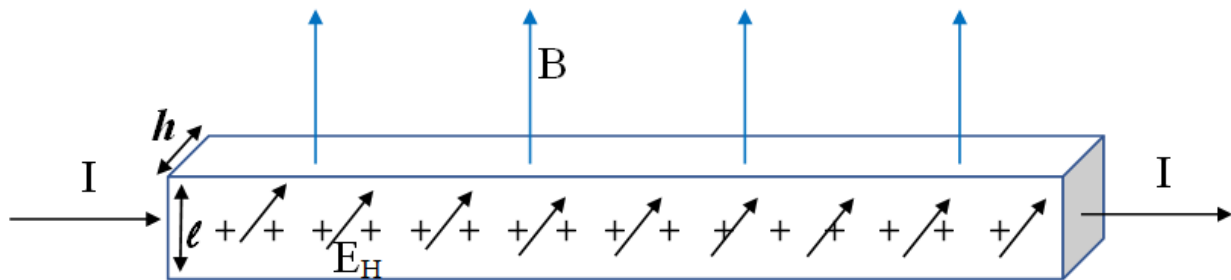


Nel laboratorio di fisica l'insegnante ha illustrato l'andamento del campo magnetico generato da una bobina percorsa da corrente utilizzando della limatura di ferro per visualizzarne le linee di forza e uno strumento che ha chiamato "magnetometro ad effetto Hall" per misurarne la intensità in vari punti.

L'effetto Hall, che fu scoperto nel 1879 dal fisico statunitense Edwin Herbert Hall, consente di misurare l'intensità di un campo magnetico a partire dalla misura di una differenza di potenziale ΔV_H detta appunto "di Hall". In rete, oltre a queste informazioni, hai trovato la seguente descrizione schematica di funzionamento dello strumento:

"Una lastrina di rame, di sezione rettangolare $S = l \cdot h$, è percorsa da una corrente elettrica costante I . Se si immerge questa lastrina in un campo magnetico uniforme B diretto come in figura, la faccia anteriore della lastrina si carica positivamente e quella posteriore (non visibile) si carica negativamente. Tra le due facce quindi si genera una differenza di potenziale ΔV_H (la differenza di potenziale di Hall) e tra di esse è presente un campo elettrico E_H (detto campo di Hall) diretto come indicato in figura."



1. Spiega l'origine del campo elettrico E_H e della differenza di potenziale ΔV_H .
2. L'effetto Hall può essere usato per individuare il segno della carica in moto nei conduttori metallici. Illustra qualitativamente come cambia il fenomeno a seconda del segno delle cariche in moto.
3. Dimostra l'esistenza di una relazione lineare $\Delta V_H = kB$ tra la differenza di potenziale che si instaura tra le facce della lastrina e l'intensità del campo magnetico B , quando si è raggiunta la condizione di equilibrio tra le forze che agiscono sulle cariche in moto.
4. Perché il dispositivo possa essere usato come magnetometro, è necessario procedere alla sua taratura, cioè alla misurazione di ΔV_H in presenza di valori noti del campo magnetico B . La seguente tabella mostra i dati sperimentali di una taratura effettuata in laboratorio:

B [mT]	100	200	300	400	500
ΔV_H [10^{-7} V]	0,70	1,5	2,3	3,4	4,3

Mostra che tali dati sono compatibili con una relazione di proporzionalità diretta tra ΔV_H e B , traccia il grafico di taratura e fornisci una stima del valore della costante di proporzionalità k . Come valuteresti l'incertezza della stima effettuata?

5. Dati $h = 0,10$ cm e $l = 2,0$ cm e adoperando $9,1 \cdot 10^{-7}$ V/T come valore della costante k , ricava il valore della velocità degli elettroni di conduzione del rame (detta anche "velocità di deriva"). A partire da questo valore, e dalla conoscenza del valore della corrente $I = 1,0$ A, come determineresti la densità di carica per unità di volume presente nella lastrina?

[Nel riportare il testo è stata corretta la scrittura, usando – come dovuto – caratteri corsivi per i simboli delle grandezze e tondi per i simboli delle unità di misura]

SVOLGIMENTO

(1) Quando la corrente fluisce nella lastrina, in presenza del campo magnetico \vec{B} i portatori di carica in moto (elettroni, di carica $-e$) sono soggetti alla forza di Lorentz $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$, dove \vec{v} è la velocità di deriva, di verso contrario a quello della corrente. Con la geometria indicata dalla figura, questa forza risulta orientata verso la faccia anteriore della lastrina e gli elettroni sono, perciò, sollecitati ad accumularsi da quella parte (e a diradarsi dalla parte opposta). Lo spostamento delle cariche si manifesta attraverso una piccola differenza di potenziale ΔV_H , negativa, tra la faccia anteriore e la faccia posteriore della lastrina; corrispondentemente, gli elettroni sono soggetti a un campo elettrostatico (di intensità $E_H = \Delta V_H/h$) che cresce fino ad equilibrare l'azione della forza di Lorentz.

Si osservi che, per quanto ora detto, la figura mostra una distribuzione errata delle cariche: in realtà sono gli elettroni ad addensarsi verso la faccia anteriore della lastrina. Coerentemente, anche il campo \vec{E}_H è in realtà orientato nel verso opposto a quanto rappresentato nella figura.

(2) Se, viceversa, i portatori di carica fossero positivi, essi si muoverebbero concordemente al verso della corrente e la forza di Lorentz porterebbe a un addensamento di carica positiva (anziché negativa) sulla faccia anteriore della lastrina. Cosicché anche la differenza di potenziale ΔV_H tra le due facce sarebbe positiva. In sostanza, il segno di ΔV_H permette di caratterizzare i portatori di carica come positivi o negativi.

(3) In condizioni stazionarie, per quanto detto sopra, la forza elettrostatica equilibra la forza di Lorentz e quindi, in modulo, $E_H = vB$. Poiché $E_H = \Delta V_H/h$, si ricava subito:

$$\Delta V_H = hvB = kB.$$

La proporzionalità tra ΔV_H e B (fissati lo spessore del conduttore e l'intensità di corrente), è solitamente espressa tramite il coefficiente di Hall R_H , caratteristico dei vari materiali. A questo fine, con riferimento alla geometria indicata nella figura, si consideri la quantità $J = I/S = qnv$ che rappresenta la densità di corrente nella lastrina (n è la densità numerica dei portatori di carica e q la carica di ciascun portatore). Si definisce allora $R_H = E_H/(JB)$.

Avremo perciò:

$$R_H = \frac{E_H}{JB} = \frac{\Delta V_H}{hJB} = \frac{\Delta V_H lh}{hIB} = \frac{\Delta V_H l}{IB}$$

da cui si ricava:

$$\Delta V_H = R_H \frac{IB}{l}. \quad [1]$$

Questo risultato mostra che il valore della differenza di potenziale di Hall è direttamente proporzionale all'intensità di corrente e al valore del campo magnetico e inversamente proporzionale allo spessore l della lastrina.

Per la definizione di R_H e per la relazione $E_H = vB$ trovata sopra, abbiamo inoltre:

$$R_H = \frac{E_H}{JB} = \frac{vB}{qnv \cdot B} = \frac{1}{qn}. \quad [2]$$

Questo mostra che R_H dipende semplicemente dalla densità dei portatori e dalla carica di ciascuno (in valore e segno). In definitiva, si ottiene:

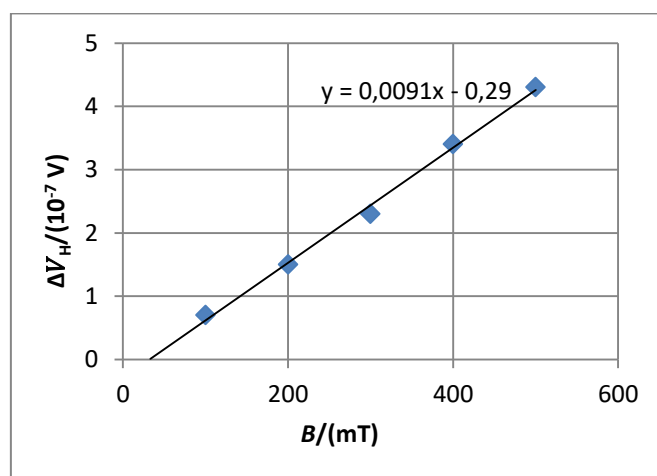
$$\Delta V_H = R_H \frac{IB}{l} = \frac{IB}{qn l} \quad [3]$$

Di questa relazione ci serviremo per commentare i punti (4) e (5) del problema.

(4) Per verificare che i valori tabulati siano compatibili con una relazione di proporzionalità diretta fra ΔV_H e B , calcoliamo i rapporti tra le misure corrispondenti¹:

B [mT]	100	200	300	400	500
ΔV_H [10^{-7} V]	0,70	1,5	2,3	3,4	4,3
$\Delta V_H / B$ [10^{-7} V/T]	7,0	7,5	7,7	8,5	8,6

I valori così calcolati non sembrano rappresentare bene una proporzionalità diretta. Tuttavia, se rappresentiamo graficamente le misure,



nel grafico possiamo riconoscere un andamento lineare: infatti, se proviamo a disegnare una retta che si accosti ai punti sperimentali, troviamo un buon adattamento con una linea che non passa per l'origine degli assi. Questo suggerisce che vi possa essere una proporzionalità diretta fra ΔV_H e B , ma non si sia provveduto adeguatamente ad azzerare la lettura in assenza di campo, prima di effettuare le misure effettive.

Come mostra l'espressione in alto, che corrisponde all'adattamento di una retta con il metodo dei minimi quadrati, si può stimare un coefficiente di proporzionalità $k = 9,1 \times 10^{-7}$ V/T (coincidente con quello che si indica di adottare nel punto 5 del problema).

È difficile valutare l'incertezza su questo valore di k , in assenza di informazioni sulle modalità con le quali sarebbero state eseguite le misure². Comunque, una stima di incertezza determinata graficamente attraverso le pendenze minima e massima della retta, in corrispondenza a un termine noto di circa $-0,3 \times 10^{-7}$ V, fornisce un risultato di circa $0,8 \times 10^{-7}$ V/T.

¹ Il primo dei valori di tensione nella tabella è scritto con due cifre decimali, a differenza di tutti gli altri che ne hanno una sola. Questo sembrerebbe voler indicare l'intenzione di fornire tutti i dati con due cifre significative, ma in realtà è decisamente strano che il risultato di una misura reale si ottenga per un valore con la sensibilità di due decimali e per gli altri valori no.

² L'errore standard sul coefficiente k vale $0,3 \times 10^{-7}$ V/T. Il calcolo statistico corrispondente è, però, fuori dalle competenze degli studenti; inoltre è discutibile che possa essere applicato in questo caso, dove si ignora del tutto quali potessero essere le modalità della "misura".

Per quanto ricavato sopra al punto (3), il coefficiente k dovrebbe esprimersi come³:

$$-k = R_H \frac{I}{l}$$

e, quindi, dovremmo poter ricavare il valore di R_H tramite la relazione:

$$R_H = -k \frac{l}{I}$$

Se adottiamo per il calcolo i valori indicati al punto 5, in particolare $l = 2,0$ cm e $I = 1,0$ A, otteniamo:

$$R_H = -9,1 \times 10^{-7} \frac{2,0 \times 10^{-2} \text{ m}^3}{1,0 \text{ C}} = -1,8 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{C}.$$

Questo valore è del tutto fuori scala: infatti, per il rame, un valore di riferimento è⁴:

$$R_H = -5,5 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{C}.$$

Si può supporre che vi sia stato uno scambio, nel punto 5 del testo, tra i valori di h (larghezza della piastrina) e l (spessore della stessa). In questa ipotesi possiamo ricalcolare R_H , ottenendo questa volta un valore di $-9,1 \times 10^{-10} \text{ m}^3/\text{C}$, però ancora non soddisfacente. In sostanza, i dati forniti mostrano un disaccordo sostanziale con quanto ci si deve attendere per l'effetto Hall nel rame.

(5) Adottiamo, comunque, i valori forniti dal testo per calcolare la velocità di deriva degli elettroni. Abbiamo trovato sopra che $k = hv$. Perciò⁵:

$$v = \frac{k}{h} = \frac{9,1 \times 10^{-7}}{1,0 \times 10^{-3}} \text{ m/s} = 9,1 \times 10^{-4} \text{ m/s}.$$

Per rispondere al secondo quesito di questo punto e determinare la densità numerica degli elettroni nella lastrina, ricorriamo all'espressione di J che abbiamo considerato al punto (3): $J = I/S = qnv$.

Calcoliamo allora:

$$n = \frac{I}{evhl} = \frac{I}{ekl} = \frac{1,0}{1,6 \times 10^{-19} \cdot 9,1 \times 10^{-7} \cdot 2,0 \times 10^{-2}} \text{ m}^{-3} = 3,4 \times 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

$$en = \frac{I}{kl} = \frac{1,0}{9,1 \times 10^{-7} \cdot 2,0 \times 10^{-2}} \text{ C/m}^{-3} = 5,5 \times 10^7 \text{ C/m}^{-3}.$$

Il primo di questi valori può essere confrontato con quanto si trova in letteratura⁶: $n_{\text{Cu}} = 8,47 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Il secondo con $\frac{-1}{R_H} = \frac{1}{5,5 \times 10^{-11}} \text{ C/m}^{-3} = 1,8 \times 10^{10} \text{ C/m}^{-3}$. In entrambi i casi c'è una discrepanza di più di 200 volte!

COMMENTI

Questo problema presenta molti aspetti discutibili.

– Salta subito all'occhio il fatto che siano ignorate le regole di scrittura previste per i simboli delle grandezze e per le unità di misura⁷ (nel trascrivere il testo abbiamo corretto questi errori di scrittura).

³ Il segno negativo tiene conto del fatto che la lamina posteriore della lastrina è, in realtà, a un potenziale più alto di quella anteriore.

⁴ <http://it.stlawu.edu/~koon/HallTable.html>

⁵ Nell'ipotesi che i valori di l e di h siano stati scambiati nel testo, avremmo invece $v = 4,6 \times 10^{-5} \text{ m/s}$.

⁶ N. W. Ashcroft, N. D. Mermin. *Solid State Physics*, Harcourt College Publishers, Orlando(FL, USA) 1976.

⁷ BIPM. *The International System of Units (SI)*, Sèvres 2014.

- Come rilevato nella risposta data alla domanda 1, la figura è sbagliata: sulla faccia anteriore si addensano cariche negative. Questa circostanza può mettere in seria difficoltà lo studente chiamato a risolvere il problema.
- Molto probabilmente sono anche scambiati tra loro i valori forniti per h (larghezza della piastrina) e l (spessore della stessa). O, forse, sono state scambiate tra loro le due lettere nel disegnare la figura.
- I dati forniti dal testo contengono qualche altro errore, perché il valore di R_H che se ne ricava è più grande di due o tre ordini di grandezza rispetto a quanto atteso.
- La “spiegazione schematica” del funzionamento del sensore di Hall usato per studiare il campo magnetico nel laboratorio della scuola non è credibile: nessuno costruirebbe un sensore di Hall con il rame e con uno spessore di 2 cm (neppure con uno spessore di 1 mm). I sensori prodotti commercialmente sono realizzati con elementi sensibili di spessore dell’ordine di 10 μm (o meno) e con semiconduttori come InAs o GaAs su substrato inerte (tipicamente zaffiro) o con strutture monolitiche di Si. La miniaturizzazione permette di incorporare in un singolo chip anche l’elettronica di amplificazione del segnale, di stabilizzazione termica e di condizionamento.

La ragione principale per l’uso di uno strato sottile sta in quanto abbiamo ricavato nell’espressione [3]: la differenza di potenziale di Hall è inversamente proporzionale allo spessore della lastrina sensibile. La [3] spiega anche perché utilizzare un semiconduttore e non un metallo: la differenza di potenziale di Hall è inversamente proporzionale alla densità numerica n , che è dell’ordine di 10^{29} m^{-3} nei metalli e vale diversi ordini di grandezza in meno nei semiconduttori (riferita ai portatori maggioritari di un semiconduttore drogato di tipo- n , è circa pari alla densità dei droganti e, per esempio, può essere dell’ordine di 10^{22} m^{-3}).

La discussione dell’effetto Hall nei materiali semiconduttori è, in via di principio, complicata dalla presenza contemporanea di portatori di segno opposto. Nulla di male, dunque, a proporre un problema con una lastrina metallica, purché non la si voglia spacciare per un sensore adatto a rilevare campi di modesta intensità. Si noti che i dispositivi proposti per eseguire misure di Hall in un laboratorio didattico adottano comunque spessori assai sottili di rame quali, tipicamente, sono impiegati nei circuiti stampati. Per esempio l’elemento 11803.00 della Phywe è spesso 18 μm .