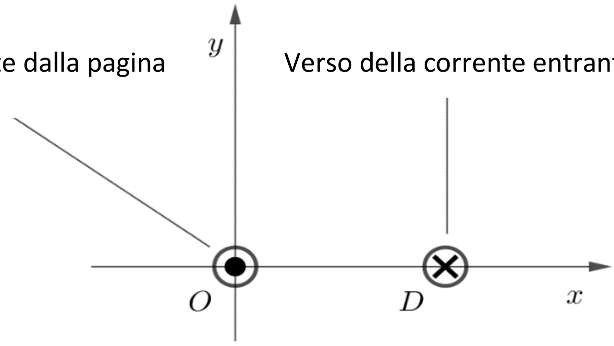
Due fili rettilinei paralleli vincolati a rimanere nella loro posizione, distanti 1 m l’uno dall’altro e di lunghezza indefinita, sono percorsi da correnti costanti di pari intensità ma verso opposto; si indichi con *i* l’intensità di corrente, espressa in ampere (A). Si consideri un piano perpendicolare ai due fili sul quale è fissato un sistema di riferimento ortogonale *Oxy*, dove le lunghezze sono espresse in metri (m), in modo che i due fili passino uno per l’origine *O* e l’altro per il punto $D(1,0)$, come mostrato in figura.



1. Verificare che l’intensità del campo magnetico $\vec{B}$, espresso in tesla (T), in un punto $P(x,0)$, con $0 < x < 1$, è data dalla funzione $B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$, dove K è una costante positiva della quale si richiede l’unità di misura. Stabilire quali sono la direzione e il verso del vettore $\vec{B}$ al variare di x nell’intervallo $(0,1)$. Per quale valore di x l’intensità di $\vec{B}$ è minima?
2. Nella zona di spazio sede del campo $\vec{B}$, una carica puntiforme q transita, ad un certo istante, per il punto $C\left(\frac{1}{2},0\right)$, con velocità di modulo v_0 nella direzione della retta di equazione $x = \frac{1}{2}$. Descriverne il moto in presenza del solo campo magnetico generato dalle due correnti, giustificando le conclusioni.

   Stabilire intensità, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ nei punti dell’asse x esterni al segmento OD. Esistono punti sull’asse x dove il campo magnetico $\vec{B}$ è nullo?
3. Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica, studiare la funzione $f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$ dimostrando, in particolare, che il grafico di tale funzione non possiede punti di flesso. Scrivere l’equazione della retta r tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$ e determinare le coordinate dell’ulteriore punto d’intersezione tra r e il grafico di f.
4. Calcolare il valore dell’integrale

   $$\int_{1/4}^{3/4} f(x)\,dx$$

   ed interpretare geometricamente il risultato ottenuto. Esprimere, per $t \geq 2$, l’integrale

   $$g(t) = \int_{2}^{t} |f(x)|\,dx$$

   e calcolare $\lim_{t\to\infty} g(t)$. Qual è il significato di tale limite?

SVOLGIMENTO

Incominciamo col dire che i due fili dei quali parla il testo dovrebbero essere di lunghezza “infinita”, non “indefinita”, altrimenti anche il campo magnetico non potrebbe essere determinato!

Ammettendo, poi, quanto si legge in seguito nella premessa – cioè che si debba considerare un «riferimento ortogonale *Oxy*, dove le lunghezze sono espresse in metri», purtroppo la scrittura:

$$B(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

risulta priva di senso[1], perché non è possibile sottrarre dal numero 1 la lunghezza x.

Per rendere sensata la domanda (1), assumeremo la seguente formulazione alternativa:
«Si consideri un piano perpendicolare ai fili, sui quali è fissato un sistema di coordinate ortogonali Oxy così che un filo passi per l’origine O e l’altro per il punto $D \equiv (1; 0)$, come mostrato in figura.»
In questo modo, se $d = 1\mathrm{m}$ è la distanza tra i due fili ed r è la distanza dall’origine di un punto posto sull’asse delle ascisse, la coordinata x del punto rappresenta il rapporto tra tale distanza r e la distanza d, cioè: $x = r/d$.
Con queste ipotesi, possiamo ora affrontare il punto (1).

1) Il campo che ha per sorgente un filo rettilineo, di lunghezza infinita e percorso da una corrente di intensità i, in un punto P posto a distanza r dal filo ha modulo:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

dove μ_0 è la permeabilità magnetica del vuoto.

Il vettore $\vec{B}_1$ giace nel piano per P ortogonale al filo, è perpendicolare alla retta per P perpendicolare al filo ed è orientato in riferimento al verso della corrente secondo la “regola della mano destra”. Nel caso specifico, nei punti dell’asse delle ascisse tra $x = 0$ e $x = 1$, i campi di entrambe le correnti giacciono sul piano della figura e sono orientati verso l’alto.

La seconda corrente dà luogo a un campo di intensità:

$$B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi(d-r)}$$

cosicché, in definitiva, il campo risultante in un punto P sull’asse delle ascisse e tra i due fili, vale:

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

dove $x = r/d$, come già detto.
Risulta così chiaro che il coefficiente $K = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}$, se espresso in unità SI deve essere misurato in tesla.

Considerando che l’andamento del campo è simmetrico rispetto ai due fili (ovvero alla retta $x = 1/2$) e che il suo valore, sempre positivo tra i due conduttori, cresce con continuità avvicinandosi a ciascuno di essi, si capisce[2] che il valore minimo cercato lo si ha proprio per $x = 1/2$.

[1] Ma quante volte dovremo ripetere le medesime osservazioni a proposito delle formulazioni sbagliate presenti in queste simulazioni?
[2] Gli amanti del calcolo differenziale possono ricavare subito la derivata prima e seconda… per arrivare, ovviamente, alla stessa conclusione.

2) La carica considerata ha, nel punto C, velocità parallela alla direzione del campo $\vec{B}$. Perciò è nulla la forza di Lorentz agente su di essa e, dunque, essa si sposta lungo la retta $x = 1/2$, con velocità invariata. Il discorso vale per tutti i punti della retta: in sostanza, il moto della carica è (idealmente) rettilineo e uniforme. Idealmente, perché in un caso concreto, la minima asimmetria nel campo o il minimo spostamento della carica dalla direzione indicata farebbero perdere la condizione particolare qui esaminata.

Nei punti collocati sull'asse delle ascisse esternamente all'intervallo $(0; 1)$, il campo magnetico ha ancora intensità espressa da:

$$B = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

Il segno negativo indica che il vettore, ortogonale all'asse delle x, è orientato verso il basso.

Come si vede facilmente, poiché $x \neq x - 1$, il campo non si può annullare per valori finiti di x. Tuttavia si ha:

$$\lim_{x\to\infty} B(x) = 0.$$

3) Abbiamo già visto, descrivendo il campo $\vec{B}$, alcune caratteristiche della funzione:

$$f(x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

dove ora, però, dobbiamo intendere che il coefficiente K rappresenti una quantità adimensionale (il testo dice di studiare la funzione «Indipendentemente da ogni riferimento alla fisica»).

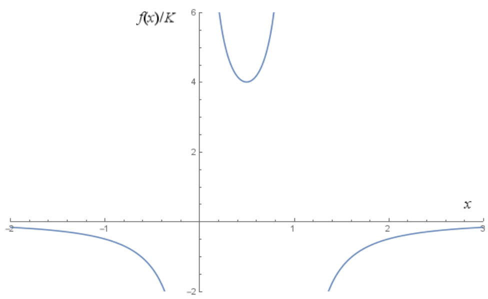
Dunque ripetiamo che è $f(x) > 0$ nell'intervallo $(0; 1)$, mentre è $f(x) < 0$ per $x < 0$ e per $x > 1$; inoltre la funzione tende a zero quando x tende all'infinito (asintoto orizzontale). In corrispondenza dei valori $x = 0$ e $x = 1$ si hanno due asintoti verticali; per $x = 1/2$ vi è un minimo.

Per studiare l'eventuale presenza di punti di flesso, si può considerare la derivata seconda di $f(x)$. Il calcolo fornisce:

$$f'(x) = K\left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2}\right)$$
$$f''(x) = 2K\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3}\right);$$

si constata che $f''(x)$ non si annulla per valori finiti di x e, quindi, non vi possono essere punti di flesso.

Rappresentiamo dunque la funzione:



Per $x = 1/3$, la derivata prima di $f(x)$ vale: $f'(1/3) = -27K/4$; corrispondentemente $f(1/3) = 9K/2$. Dunque la tangente richiesta è una retta passante per il punto $A \equiv \left(\frac{1}{3}; \frac{9K}{2}\right)$, con coefficiente angolare $m = \frac{-27K}{4}$. Possiamo perciò scrivere:

$$\frac{9K}{2} = \frac{-27K}{4} \cdot \frac{1}{3} + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{27K}{4}.$$

La tangente desiderata ha, quindi, equazione:

$$y = \frac{27K}{4}(1 - x).$$

Per trovare l'ulteriore punto di contatto tra la retta ora definita e la $f(x)$, risolviamo:

$$\frac{27K}{4}(1 - x) = K\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}\right).$$

Sviluppando, nell'ipotesi che sia $x \neq 1$, otteniamo:

$$27x^3 - 54x^2 + 27x - 4 = 0.$$

Sappiamo che questa equazione deve avere una doppia radice di valore $x = 1/3$, perciò il polinomio deve essere divisibile per $(3x - 1)^2$, il cui monomio di più alto grado è $9x^2$; il polinomio quoziente, perciò, deve contenere un termine $3x$. Oltre a ciò, il termine noto -4 non può che risultare da un corrispondente termine noto nel risultato della divisione polinomiale. In sostanza, il polinomio di terzo grado deve essere esprimibile nella forma:

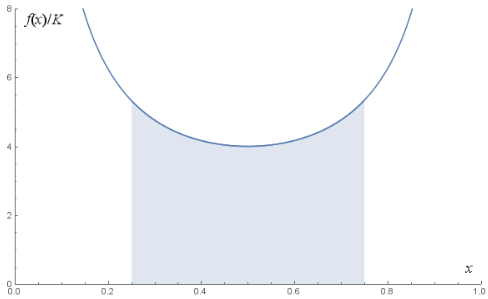
$$(3x - 4)(3x - 1)^2,$$

cosa che si può facilmente verificare sviluppando i prodotti. In definitiva, l'ulteriore punto di intersezione cercato si ha per $x = 4/3$.

4) Calcoliamo, come richiesto:

$$\int_{1/4}^{3/4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}\right) \mathrm{d}x = \big(\log(x) - \log(1 - x)\big)\Big|_{1/4}^{3/4} = \log(9).$$

Si può interpretare geometricamente questo risultato come "area" sotto la curva, così come messa in evidenza nella figura qui sotto:



Per calcolare il secondo integrale, teniamo esplicitamente in considerazione il vincolo $t \geq 2$. Questo implica che sia sempre $x > 0$ e $1 - x < 0$; calcoleremo perciò:

$$\int_2^t K\left|\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}\right| \mathrm{d}x = \int_2^t K \frac{1}{|x(1 - x)|} \mathrm{d}x = \int_2^t K \frac{1}{x(x - 1)} \mathrm{d}x = \int_2^t K\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_2^t K\left(\frac{1}{x - 1}\right) \mathrm{d}x - \int_2^t K \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \log(t - 1) - \log(1) - \log(t) + \log(2) = \log(t - 1) - \log(t) + \log(2).$$

Questa espressione tende al valore $\log(2)$ quando t tende a $+\infty$.

Il testo chiede, infine, quale sia il significato di tale limite. La domanda appare piuttosto oscura: qual è il significato di 15? Qual è il significato di $\sqrt{7}$? Qual è il significato di $\log(2)$?
Forse si voleva alludere al fatto che l'esistenza del limite indicato permette di ritenere definito l'integrale improprio:

$$\int_{2}^{+\infty} K \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right| \mathrm{d}x.$$

Chissà?