Problema 1

Testo

Assegnate due costanti reali a e b (con $a > 0$), consideri la funzione $q(t)$ così definita

$$q(t) = at \cdot \mathrm{e}^{bt}$$

1. A seconda dei possibili valori di a e b, discutere se nel grafico della funzione q è presente un punto di massimo o di minimo. Determinare i valori a e b in corrispondenza dei quali il grafico della funzione $q(t)$, in un piano cartesiano di coordinate (t, y), ha un massimo nel punto $B\left(2, \frac{8}{e}\right)$.

2. Assumendo, d'ora in avanti, di avere $a = 4$, $b = \frac{1}{2}$, studiare la funzione

   $$q(t) = 4t \cdot \mathrm{e}^{-t/2}$$

   verificando, in particolare che si ha un flesso nel punto $F\left(4, \frac{16}{\mathrm{e}^2}\right)$.

   Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto F.

3. Supponendo che la funzione $q(t)$ rappresenti, per $t \geq 0$, la carica elettrica (misurata in C) che attraversa all'istante di tempo t (misurato in s) la sezione di un certo conduttore, determinare le dimensioni fisiche delle costanti a e b sopra indicate. Sempre assumendo $a = 4$ e $b = \frac{1}{2}$, esprimere l'intensità di corrente $i(t)$ che fluisce nel conduttore all'istante t, determinare il valore massimo ed il valore minimo di tale corrente e a quale valore essa si assesta col trascorrere del tempo.

4. Indicando, per $t_0 \geq 0$, con $Q(t_0)$ la carica totale che attraversa la sezione del conduttore in un dato intervallo di tempo $[0, t_0]$, determinare a quale valore tende $Q(t_0)$ per $t_0 \to +\infty$.

   Supponendo che la resistenza del conduttore sua $R = 3\,\Omega$, scrivere, (senza poi effettuare il calcolo) un integrale che fornisca l'energia dissipata nell'intervallo di tempo $[0, t_0]$.

Soluzione

1. La funzione

   $$q(t) = at \cdot \mathrm{e}^{bt}$$

   è continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$ per qualsiasi valore di a e b reali. Cerchiamo i punti stazionari calcolando la derivata e ponendola uguale a zero.

   $$q'(t) = a\mathrm{e}^{bt} + ab\,t\mathrm{e}^{bt} = (1 + bt)\,a\,\mathrm{e}^{bt}$$

   Si ha un punto stazionario in

   $$t_0 = -\frac{1}{b} \quad \text{se} \quad b \neq 0$$

   Se $b = 0$ la funzione si riduce ad una funzione lineare e non si hanno punti stazionari. Discutiamo quindi ora i casi $b \neq 0$.

   Studiamo il segno della derivata. Essendo il fattore esponenziale sempre positivo e $a > 0$ per ipotesi, basta studiare il segno di $(1 + bt)$.

   $$q'(t) \geq 0 \iff 1 + bt \geq 0$$

e quindi

$$1 + bt \geq 0 \iff \begin{cases} t \geq -\frac{1}{b} & \text{per}\, b > 0 \\ t \leq -\frac{1}{b} & \text{per}\, b < 0 \end{cases}$$

Dall'analisi del segno della derivata, deduciamo che per $b > 0$ si ha un minimo in $t_0 = -1/b$ e per $b < 0$ si ha un massimo sempre in $t_0 = -1/b$.

Questo è confermato anche dalla derivata seconda

$$q''(t) = ab\,\mathrm{e}^{bt} + (1 + bt)\,ab\,\mathrm{e}^{bt} = (2 + bt)\,ab\,\mathrm{e}^{bt}$$

Nel punto stazionario

$$q''(-1/b) = ab\,\mathrm{e}^{bt}$$

Perciò se $b > 0$ la derivata seconda è positiva e quindi abbiamo un minimo e se $b < 0$ la derivata seconda è negativa e abbiamo un massimo.

Poiché la funzione deve avere un massimo, deve essere $b < 0$. Affinché il massimo sia collocato in $t = 2$ come richiesto, poiché, come abbiamo già visto, l'ascissa del massimo è in $t = -1/b$ deve essere necessariamente

$$-\frac{1}{b} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{2}$$

Imponiamo ora il passaggio per il punto B

$$\frac{8}{\mathrm{e}} = a \cdot 2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 2} \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

2. Avendo scelto $a = 4$, $b = -\frac{1}{2}$ la derivata prima della funzione diventa

$$q'(t) = 4(1 - \frac{1}{2}t)\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = (4 - 2t)\mathrm{e}^{-t/2}$$

Per identificare il flesso, calcoliamo la derivata seconda. Per farlo possiamo derivare la $q'(t)$ appena calcolata oppure usare l'espressione generale per $q''(t)$ ricavata al punto precedente e inserire i valori a e b. In entrambi i casi si ottiene

$$q''(t) = (t - 4)\mathrm{e}^{-t/2}$$

Il flesso si trova quindi nel punto di ascissa $t = 4$ e ordinata

$$q(4) = 4 \cdot 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 4} = 16\mathrm{e}^{-2}$$

L'equazione della retta tangente è data da

$$y = q'(4)(t - 4) + q(4)$$

Si ha

$$q'(4) = -4\mathrm{e}^{-2}$$

quindi

$$y = -4\mathrm{e}^{-2}(t - 4) + 16\mathrm{e}^{-2} = -4\mathrm{e}^{-2}\,t + 32\mathrm{e}^{-2}$$

3. La premessa su quello che rappresenta la funzione $q(t)$ è priva di senso, infatti "la quantità di carica attraversa all'istante di tempo t la sezione di un certo conduttore" non può che essere, eventualmente, nulla.

A cura di A.I.F. - Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Tra le possibili interpretazioni del testo, scegliamo qui quella che ci sembra più probabile. Svilupperemo una discussione più approfondita su questo punto in un documento separato.

Assumiamo quindi che $q(t)$ rappresenti la quantità di carica che *ha attraversato* la sezione di un conduttore *fino* all'istante di tempo t

Poiché $q(t)$ deve essere una carica e t è un tempo, la costante a deve avere dimensioni

$$[a] = [Q][T]^{-1}$$

L'esponenziale ha senso solo se calcolata su un numero puro, quindi

$$[b] = [T]^{-1}$$

La corrente si ottiene come derivata della carica quindi

$$i(t) = q'(t) = (4 - 2t)\mathrm{e}^{-t/2}$$

Abbiamo già calcolato la derivata di questa funzione, è la derivata seconda della $q(t)$.

$$i'(t) = (t - 4)\mathrm{e}^{-t/2}$$

quindi

$$i' \geq 0 \iff t \geq 4$$

Perciò la corrente ha un minimo locale in $t = 4\,\mathrm{s}$. In $t = 0$ abbiamo

$$i(0) = 4\,\mathrm{C/s} = 4\,\mathrm{A}$$

mentre

$$\lim_{t\to+\infty} i(t) = \lim_{t\to+\infty} (4 - 2t)e^{-t/2} = 0$$

Perciò il valore massimo della corrente si ha per $t = 0$ e vale $4\,\mathrm{A}$ mentre il valore minimo si ha per $t = 4\,\mathrm{s}$ e vale

$$i_{\min} = -4\,\mathrm{e}^{-2}$$

Qui sono necessari due chiarimenti.

(a) Non è naturalmente sensato esprimere il valore di una grandezza fisica con un numero infinito di cifre significative, lasciando indicato quindi espressamente come valore minimo $i_{\min} = -4\,\mathrm{e}^{-2}$. Nel testo si chiede di porre $a = 2$, $b = -\frac{1}{2}$, dati forniti con una sola cifra significativa, perciò, secondo le convenzioni normalmente in uso nella scuola secondaria, si dovrebbero esprimere i valori delle grandezze fisiche ottenuti con una sola cifra significativa. Sarebbe perciò più corretto scrivere $i_{\min} = 0{,}5\,\mathrm{A}$.

(b) In molte situazioni, anche se non tutte, non ha molto senso fisico chiedere il valore minimo della corrente, comprensivo del suo segno, in quanto quello che importa è il valore minimo dell'intensità della corrente. Poiché la corrente si annulla per $t = 2\,\mathrm{s}$, il valore minimo dell'intensità di corrente è 0.

Il valore a cui si assesta la corrente è pari al $\lim_{t\to+\infty} i(t)$ che è stato calcolato sopra e vale 0.

4. Poiché $i(t) = q'(t)$ si ha

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} i(t)\mathrm{d}t = q(t_0) - q(0) = 4t_0\mathrm{e}^{-t_0/2}$$

$$\lim_{t_0\to+\infty} Q(t_0) = 0$$

Si potrebbe voler interpretare la richiesta come quella di calcolare la carica totale che ha attraversato la sezione in un verso o in quell'altro. In questo caso, si dovrebbe calcolare $Q(t_0)$ con l'integrale

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} |i(t)|\mathrm{d}t$$

L'energia dissipata è pari all'integrale nel tempo della potenza istantanea. Quest'ultima vale

$$P(t) = i(t)^2 R$$

Perciò, ricordando che $R = 3\,\Omega$.

$$E(0;t_0) = \int_0^{t_0} i(t)^2 R\mathrm{d}t = 3\int_0^{t_0} (4-2t)^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

Viste le unità scelte per $i(t)$ e il tempo t, il risultato sarà espresso in joule.