



Molle in serie e in parallelo

(Pervenuto il 21.3.2011, approvato il 13.1.2012)

ABSTRACT

Hooke's Law applied to a number of springs connected in series (same strength) or in parallel (same elongation) suggests a mechanical analogy to the electrostatic behavior of a number of series or parallel connected capacitors.

1. Approfondiamo la legge di Hooke

La verifica della legge di Hooke è tra gli esperimenti più gettonati all'inizio di un corso di Fisica. Solitamente si appendono ad una molla di massa trascurabile diversi pesetti, si verifica la diretta proporzionalità tra la forza peso F e l'allungamento s della molla e si ricava il valore della costante di proporzionalità $k = F/s$. Infine, confrontando molle diverse tra di loro, si fa riflettere gli studenti sul significato della costante elastica di una molla come misura della sua rigidità.

Quest'anno, in una terza Liceo Tecnologico, ho complicato l'esperimento chiedendo alla classe cosa sarebbe accaduto mettendo due molle di costanti elastiche k_1 e k_2 in serie tra loro (Fig. 1). Si ottiene una molla più o meno rigida delle due molle di partenza?

La risposta data di getto dagli studenti è che la costante elastica k della molla "risultante" è uguale alla somma $k_1 + k_2$, ma è bastato farli riflettere un po' per convincerli che non è affatto così! Infatti l'allungamento di n molle in serie è:

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_n \quad (1)$$

ovvero applicando la legge di Hooke, trascurando il peso delle molle, si ottiene:

$$F/k = F_1/k_1 + F_2/k_2 + \dots + F_n/k_n \quad (2)$$

ed essendo le molle in serie risulta $F_1 = F_2 = \dots = F_n = F$ e pertanto:

$$1/k = 1/k_1 + 1/k_2 + \dots + 1/k_n \quad (3)$$

Quindi la costante elastica di una molla formata da due o più molle in serie è minore della minore tra le molle che la costituiscono. Pertanto, mettendo in serie due molle uguali, la costante elastica dimezza, mentre tagliando esattamente a metà una molla si ottengono due molle ciascuna con costante elastica doppia di quella di partenza.

Analogamente, mettendo due o più molle in parallelo (Fig. 2), sempre trascurando il peso delle molle, si ha:

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n \quad (4)$$

ovvero applicando la legge di Hooke:

$$ks = k_1s_1 + k_2s_2 + \dots + k_ns_n \quad (5)$$

ed essendo $s_1 = s_2 = \dots = s_n = s$ si ottiene:

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (6)$$

Come ben sanno i frequentatori delle palestre, è più difficile utilizzare l'attrezzo della Fig. 3 con quattro molle che con due, perché per ottenere lo stesso allungamento occorre applicare una forza doppia.

Figura 1 (a sinistra). Due molle in serie: la forza applicata ad entrambe è la stessa, mentre l'allungamento risultante è la somma degli allungamenti delle due molle.

Figura 2 (centrale). Due molle in parallelo: l'allungamento delle due molle è lo stesso, mentre la forza applicata è la somma delle forze applicate alle due molle.

Figura 3 (in basso). Le molle di questo attrezzo possono essere tolte per ridurre lo sforzo dell'atleta. Per esempio, usando due molle anziché quattro si ottiene, a parità di forza, un allungamento doppio.

Figura 4 (a destra). Sistema elastico ottenuto con sei molle disposte sia in serie che in parallelo.



2. I dati sperimentali della 3^a A

Due gruppi di studenti della 3^a A hanno eseguito la prova con due molle misurando dapprima k_1 e k_2 ; quindi disponendo le molle come in Fig. 1 hanno misurato k_{serie} per verificare la relazione (3); mentre disponendole come in Fig. 2, hanno misurato k_{paral} per verificare la relazione (6). Le molle sono state sistemate in parallelo usando una penna o una graffetta in orizzontale e del nastro adesivo.

Riporto questi risultati sinteticamente in Tabella 1: i valori di k_1 , k_2 , k_{serie} e k_{paral} sono la media degli F/s ottenuti con pesetti diversi. L'accordo con la (3) e la (6) è buono tenendo conto anche delle incertezze.

Un terzo gruppo ha effettuato una prova più articolata utilizzando sei molle. Dapprima ha misurato la costante elastica di ogni molla ricavandola sia come best-fit dal grafico tramite il comando di *Microsoft Excel* "aggiungi linea di tendenza", sia come media di F/s per prove con pesetti diversi.

I risultati sono riportati nelle prime sei colonne della Tabella 2. Il best-fit è il metodo più corretto, ma anche la media, che è il metodo seguito dai primi due gruppi, dà risultati simili.¹

Successivamente le sei molle sono state disposte come in Fig. 4: le molle 1,2 e 6 in parallelo tra loro, in serie alle molle 3 e 5 in parallelo tra loro ed ancora in serie alla molla 4: i dati ottenuti sono riportati in Tabella 3 e rappresentati in Fig. 5.

Nella penultima colonna della Tabella 2 si riportano i valori della costante elastica k_{equiv} del sistema equivalente, ottenuti sia dal best fit lineare della Fig. 5, sia

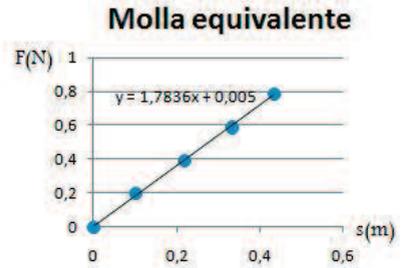


Figura 5. Grafico forza-allungamento ottenuto con il sistema elastico della Fig. 4.

Gruppo	k_1 (N/m)	k_2 (N/m)	k_{serie} (N/m)	$[k_2k_2/(k_1+k_2)]$ (N/m)	k_{paral} (N/m)	$[k_1+ k_2]$ (N/m)
1	2,90±0,01	2,90±0,01	1,44±0,01	1,45±0,02	5,73±0,01	5,80±0,02
2	3,06±0,01	2,84±0,01	1,48±0,01	1,47±0,02	5,89±0,01	5,90±0,02

Tabella 1. Costanti elastiche misurate da due gruppi di studenti con due molle dapprima usate singolarmente (k_1 e k_2), poi disposte sia in serie (k_{serie}) che in parallelo (k_{paral}). I risultati ottenuti sono confrontati con quelli calcolati tramite le formule (3) e (6) rispettivamente.

	k_1 (N/m)	k_2 (N/m)	k_3 (N/m)	k_4 (N/m)	k_5 (N/m)	k_6 (N/m)	k_{equiv} (N/m)	k_{teor} (N/m)
best fit	2,90	2,91	3,16	3,14	3,16	3,09	1,78	1,70
Media di F/s	2,92±0,01	2,91±0,01	3,18±0,01	3,19±0,01	3,18±0,01	3,10±0,01	1,83±0,09	1,72±0,01

Tabella 2. Costanti elastiche di sei molle e costante elastica k_{equiv} del sistema elastico di Fig. 4 ricavata sia dal best fit lineare che dalla media dei rapporti F/s . I valori k_{teor} dell'ultima colonna sono ottenuti dalla (7) usando i valori della riga corrispondente.

m (kg)±10 ⁻⁴ kg	F (N)± 0,001N	h (m) ±0,001m	s (m) ± 0,002 m	F/s (N/m)
0	0	0,433	0	//
2,00×10 ⁻²	0,196	0,332	0,101	1,94± 0,05
4,00×10 ⁻²	0,392	0,215	0,218	1,80± 0,02
6,00×10 ⁻²	0,588	0,100	0,333	1,77± 0,01
8,00×10 ⁻²	0,784	0,000	0,433	1,81± 0,01

Tabella 3. Risultati ottenuti con la disposizione della Fig. 4. L'altezza h è misurata dal piano del tavolo, s è l'allungamento del sistema elastico, m è la massa appesa, F è la forza peso.

come media degli F/s della Tabella 3. Infine il valore teorico k_{teor} dell'ultima colonna della Tabella 2 è stato calcolato con la seguente relazione:

$$1/k_{teor} = 1/(k_1 + k_2 + k_6) + 1/(k_3 + k_5) + 1/k_4 \quad (7)$$

sostituendo sia i valori del best fit che le medie degli F/s .

I valori di k_{equiv} del sistema equivalente risultano leggermente più alti del k_{teor} perché la condizione di molle in parallelo (stesso allungamento) è difficile da soddisfare con molle diverse tra di loro: le molle diverse tendono ad inclinarsi leggermente per cui l'allungamento misurato, come variazione di quota h del portapesi, risulterà di poco inferiore dell'allungamento effettivo e di conseguenza k_{equiv} risulterà maggiore di k_{teor} .

3. Molle e condensatori elettrici

Il Liceo Scientifico Tecnologico, che sta cedendo il passo al Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate, ha il vantaggio di prevedere al biennio la disciplina *Laboratorio di Fisica Chimica* e pertanto, gli studenti con buona memoria mi hanno fatto subito notare che al biennio avevano già visto qualcosa di simile: i resistori in serie e in parallelo! Anche se per i resistori valeva una regola opposta: in serie si sommano le resistenze, mentre in parallelo si sommano i reciproci. Effettivamente volendo fare un'analogia elettrica, più che ad un resistore, occorre riferirsi ad un condensatore: questo, come la molla, accumula energia ed una pos-

MOLLA	CONDENSATORE ELETTRICO
allungamento s	differenza di potenziale V
forza F	carica elettrica Q
costante elastica $k = F/s$	capacità elettrica $C = Q/V$
energia potenziale elastica $U = \frac{1}{2} ks^2$	energia potenziale elettrostatica $U = \frac{1}{2} CV^2$
n molle in serie (stessa forza) $1/k = 1/k_1 + 1/k_2 + \dots + 1/k_n$	n condensatori in serie (stessa carica elettrica) $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_n$
n molle in parallelo (stesso allungamento) $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$	n condensatori in parallelo (stessa differenza di potenziale) $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

Tabella 4. Analogia tra una molla e un condensatore elettrico.

RECIPIENTE CILINDRICO	CONDENSATORE ELETTRICO
livello d'acqua h	differenza di potenziale V
volume d'acqua \mathcal{V}	carica elettrica Q
sezione del cilindro $A = \mathcal{V}/h$	capacità elettrica $C = Q/V$
energia potenziale gravitazionale in unità di ρg $U/\rho g = \frac{1}{2} Ah^2$	energia potenziale elettrostatica $U = \frac{1}{2} CV^2$
n cilindri in serie (stesso volume) $1/A = 1/A_1 + 1/A_2 + \dots + 1/A_n$	n condensatori in serie (stessa carica elettrica) $1/C = 1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_n$
n cilindri in parallelo (stesso livello d'acqua) $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$	n condensatori in parallelo (stessa differenza di potenziale) $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

Tabella 5. Analogia tra un recipiente cilindrico ed un condensatore elettrico.

sibile analogia formale tra le grandezze fisiche è riportata nella Tabella 4, che mostrerò agli studenti al momento di parlare dei condensatori elettrici, confidando nella loro buona memoria!²

Questa non è l'unica analogia meccanica possibile per i condensatori elettrici. Per esempio Fermi e Persico scrivevano così in [1] per gli studenti degli anni Quaranta: “vediamo facilmente che la capacità elettrica di un conduttore si deve far corrispondere alla sezione del recipiente cilindrico che lo rappresenta: infatti la quantità di acqua contenuta nel recipiente è uguale a questa sezione moltiplicata per h , così come la quantità di elettricità contenuta nel conduttore è uguale alla sua capacità moltiplicata per V ”.

Seguendo questa analogia si può reimpostare la Tabella 4 ottenendo la Tabella 5. Anche se in [1] si parla di conduttori e non di condensatori, la sostanza del ragionamento non cambia: le formule valide per un conduttore a potenziale V rispetto ad un riferimento (es. rispetto a terra) si applicano ad un condensatore in cui un'armatura si trovi a potenziale V rispetto all'altra.

La Tabella 5 offre un'immagine intuitiva del concetto di capacità elettrica, ma richiede qualche precisazione in più rispetto alla Tabella 4. L'energia potenziale gravitazionale del volume d'acqua del cilindro è pari a quella di una massa $\rho \mathcal{V}$ posta nel baricentro del cilindro ad altezza $\frac{1}{2} h$ dal fondo ed essendo ρ la densità del liquido, ovvero:

$$U = \frac{1}{2} \rho \mathcal{V} gh = \frac{1}{2} \rho g Ah^2 \quad (8)$$

e pertanto la quantità $\frac{1}{2} Ah^2$ rappresenta un'energia in unità di ρg .

Inoltre il concetto di cilindro equivalente di due cilindri “in serie” non è molto intuitivo: dati due cilindri di uguale volume \mathcal{V} ed un terzo cilindro la cui altezza è la somma delle due altezze, esso avrà lo stesso volume \mathcal{V} se la sua sezione rispetta l'equazione $1/A = 1/A_1 + 1/A_2$. Più chiaro invece è il concetto di cilindro equivalente di due cilindri “in parallelo”: dati due cilindri di uguale altezza h ed un terzo cilindro il cui volume è la somma dei due volumi, questo avrà la stessa altezza h se la sua sezione rispetta l'equazione $A = A_1 + A_2$. Sperimentalmente il collegamento in serie o in parallelo dei due cilindri si può ottenere tramite un tubicino con un rubinetto che venga chiuso quando i volumi d'acqua sono uguali (in serie) o che venga lasciato aperto in modo che le due altezze siano uguali (in parallelo).

In ogni caso occorre aver presente che l'analogia stabilisce solo un “rapporto di somiglianza tra alcuni elementi costitutivi di due fatti od oggetti, tale da far dedurre mentalmente un certo grado di somiglianza tra i fatti e gli oggetti stessi”[2] e pertanto, in quanto somiglianza, avrà dei limiti e richiede delle precisazioni. Ciò non toglie che le analogie meccaniche siano di grande aiuto per suggerire agli studenti un modello più intuitivo dei fenomeni elettrici.

Ringraziamenti

Ringrazio il mio collega Stefano Russo per la lettura del manoscritto, inoltre ringrazio tutti gli studenti della 3^a A del Liceo Scientifico Tecnologico “Cartesio” di Cinisello Balsamo (MI) per la loro collaborazione nello svolgimento della prova sperimentale: Andrea Accorinti, Steven Bonasia, Karlo Bstaors, Federico Capponnetto, Kevin Cusenza, Lorenzo Di Pasquali (a cui va un ringraziamento particolare per le misure della Tabella 3), Dario Didonè, Matteo Doni, Claudia Focchi, Fabia Fossili, Alessandro Malagrida, Alessandro Mazzucotelli (autore delle foto in Figura 1 e 2), Fabio Melzi, Edoardo Migliorini, Giulia Nania, Monica Or-

tone, Melinda Palmeri, Marco Panizza, Barbara Pennavaria, Fabrizio Pozzi (autore della foto in Figura 4), Paolo Quaggia, Stefano Ruffin, Simone Scardoni, Alice Vinci.

Bibliografia

- [1] FERMI, E., PERSICO, E. *Fisica per Scuole medie superiori*, Zanichelli, Bologna 1946, Capitolo VII, pag. 202; cfr. anche http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/publication/pub_fremdsprachen/italienisch.html o http://www.scuoladecs.ti.ch/StrIIT2011/scarica/StrIIT_11.pdf
- [2] DEVOTO G., OLI G. C. , *Il dizionario della lingua italiana*, Le Monnier, Firenze 1990

Note

¹ Siccome un calcolo rigoroso delle incertezze sulle varie pendenze mi sembra troppo laborioso per essere proposto in un'esperienza didattica, in Tabella 2 mi limito a riportare le pendenze dei best fit con le cifre significative compatibili con la precisione di ogni singola misura.

² Questa analogia ha il difetto di fare corrispondere ad una grandezza intensiva, la forza, una estensiva, la carica elettrica e ad una grandezza estensiva, l'allungamento, una intensiva, il potenziale elettrico. Si potrebbe ovviare a questo inconveniente facendo corrispondere la capacità elettrica al reciproco della costante elastica. Tuttavia, proseguendo con questa diversa analogia, ci si trova costretti a definire due molle in serie quando hanno lo stesso allungamento ed in parallelo quando sono sottoposte alla stessa forza, in disaccordo con l'usuale, ed intuitiva, definizione di molle in serie e in parallelo.

LI CONGRESSO NAZIONALE AIF Napoli, Hotel Terminus, 17-20 ottobre 2012

Il 51° Congresso Nazionale dell'A.I.F. si svolgerà a Napoli, presso l'Hotel Terminus, con la collaborazione di Città della Scienza e del Museo di Fisica dell'Università.

PROGRAMMA (provvisorio)

Mercoledì 17 ottobre

Hotel Terminus

- ore 11.00 Apertura Segreteria, registrazione partecipanti
- ore 15.00 Apertura Congresso, saluti delle autorità e degli ospiti
 - Presentazione squadra Olimpiadi della Fisica
 - Premiazione vincitori Premio Bonacini
 - Premiazione vincitori Premio Bastai Prat
- ore 16.00 Relazione su invito
- ore 17.00 Comunicazioni dei soci



Giovedì 18 ottobre

Museo di Fisica dell'Università Federico II

- ore 09.00 Comunicazioni dei soci
- ore 11.30 Relazione su invito

Hotel Terminus

- ore 14.00 Assemblea dei soci - Prima convocazione
- ore 15.00 Assemblea dei soci - Seconda convocazione
- ore 18.00 Sessione Poster
- ore 21.00 Riunione dei gruppi di lavoro

Venerdì 19 ottobre

Città della Scienza - Bagnoli

- ore 09.00 Comunicazioni dei soci
- ore 11.30 Relazione su invito
- ore 15.00 Workshop

Sabato 20 ottobre

Hotel Terminus

- ore 09.00 Comunicazioni dei soci
- ore 11.30 Relazione su invito
- ore 13.00 Chiusura lavori