Annalisa Marzuoli
Università degli Studi, Pavia
e
Mario Rasetti
ISI Foundation, Torino

Sfaccettature dello spazio-tempo nella relatività generale: il calcolo di Regge[1]

ABSTRACT
One of the most innovative and fruitful contribution to theoretical physics by Tullio Regge (1931-2014) is presented. Known as "Regge Calculus", it consists of a formulation of the General Relativity developed in the celebrated paper "General Relativity without Coordinates", published in 1961 in the Nuovo Cimento.

Il 24 ottobre scorso Tullio Regge ci ha lasciati ed ha raggiunto quelle stelle che tanto amava guardare e narrare. A lui non sarebbero piaciute commemorazioni convenzionali, pure se ispirate da profondi sentimenti di ammirazione, stima e amicizia. Avrebbe piuttosto apprezzato, anche alla luce della sua lunga esperienza di divulgatore brillante e mai banale, che affrontassimo la sfida di raccontare almeno una delle tante costruzioni teoriche scaturite dalla sua mente – dai 'poli di Regge' alle simmetrie geometriche e algebriche della teoria quantistica dei momenti angolari, dalle proprietà analitiche dei diagrammi di Feynman alla dinamica dei vortici nei superfluidi – che hanno aperto tanti nuovi campi di ricerca i cui sviluppi sono tuttora assolutamente attuali.

Nel 2015, anno in cui ricorre il centesimo anniversario della teoria della Relatività Generale di Einstein, la nostra scelta cade sulla sua innovativa riformulazione di tale teoria, pubblicata sulla rivista Il Nuovo Cimento nel 1961 con il significativo titolo "General Relativity without Coordinates" e ormai universalmente nota come Regge Calculus [1].

Tullio amava i classici della matematica, che conosceva a fondo, e non c'è dubbio che si può far risalire questo suo splendido lavoro al fascino che su di lui esercitò Karl Friedrich Gauss, in questo caso con le sue "Disquisitiones generales circa superficies curvas", in cui viene enunciato il 'theorema egregium': «Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet».

La straordinaria bellezza e profondità del teorema di Gauss sta nel fatto che la curvatura 'gaussiana' è intrinseca e indipendente dallo spazio ambiente, nonostante sia definita come prodotto delle curvature principali, che dipendono invece da come la superficie è immersa nello spazio euclideo tridimensionale (si veda Figura 1).

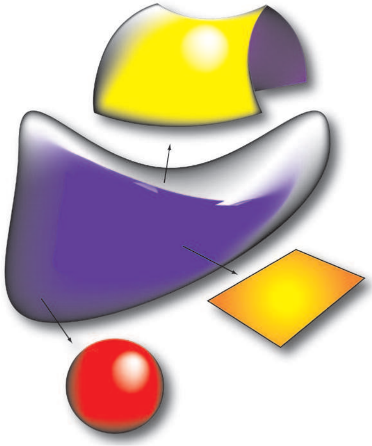


Figura 1. È qui riprodotta una generica superficie immersa in uno spazio tridimensionale (per la nostra percezione un ordinario spazio euclideo 3-D), di cui percepiamo la curvatura come una funzione che varia da punto a punto in maniera regolare: diverse porzioni sono assimilabili (localmente isometriche) alla superficie della sfera (curvatura positiva), o alla sella (curvatura negativa) oppure al piano (che è piatto, cioè ha curvatura ovunque nulla). Tra le conseguenze del 'theorema egregium' c'è il fatto che due superficie con curvatura gaussiana differente (in particolare nel segno) non possono essere fra loro globalmente isometriche, come è da secoli ben noto ai cartografi alle prese con le planimetrie del globo terrestre.

La relatività generale di Einstein è stata chiamata da John Archibald Wheeler, che di Regge fu mentore [2], *geometrodinamica*, perché è la fusione della geometria (dello spazio-tempo) con la dinamica, che tradizionalmente tratta i movimenti e le forze. Nella relatività generale la forza di gravità, formalizzata da Newton come un campo vettoriale, emerge come effetto della curvatura dello spazio-tempo. Nelle pregnanti parole di Wheeler: «La materia dice allo spazio-tempo come incurvarsi, e lo spazio-tempo curvo dice alla materia come muoversi».

Le strutture matematiche utilizzate da Einstein, e che generalizzano a dimensioni superiori le superficie curve della figura, sono chiamate varietà riemanniane a n dimensioni nel linguaggio della geometria differenziale[1]. Una varietà riemanniana M^n ha due proprietà caratterizzanti:

i) è localmente modellata come lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$;
ii) è dotata di una metrica (il tensore metrico riemanniano) che, localmente, può sempre essere ricondotta alla metrica euclidea standard di $\mathbb{R}^n$.

Per rendere esplicita questa definizione ricordiamo innanzitutto che nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ si possono adottare coordinate cartesiane ortogonali $x_1, x_2, \cdots, x_n$ in modo tale che il quadrato della distanza tra due punti infinitesimamente vicini è data da $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + \cdots + (\mathrm{d}x_n)^2$ (teorema di Pitagora in n dimensioni). Questa quantità può essere riscritta come $(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{a,b}\delta_{ab}\mathrm{d}x_a\mathrm{d}x_b$ (a,b = 1,2,⋯, n), dove δ_{ab} è interpretabile come l'elemento a, b di una matrice quadrata n × n i cui elementi diagonali (δ_{aa}) valgono 1, mentre gli elementi fuori dalla diagonale (δ_{ab}, con a ≠ b) sono nulli. Una varietà riemanniana M^n è dunque dotata di un tensore metrico g_{ab} tale per cui, localmente, il quadrato della distanza infinitesima (detta anche elemento di linea) si esprime come $(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{a,b} g_{ab}\, \mathrm{d}x_a\, \mathrm{d}x_b$, e inoltre $(\mathrm{d}s)^2$ è positivo. La differenza cruciale con il caso dello spazio euclideo è che qui le coordinate, denotate ancora con $x_1, x_2, \cdots, x_n$, sono definite solo localmente, vale a dire parametrizzano porzioni di M^n ma non sono estendibili all'intera varietà. La conoscenza della metrica, in funzione delle coordinate dei punti della varietà, permette di ricostruirne tutte le proprietà geometriche intrinseche, quali le curve di lunghezza minima che congiungono due punti scelti arbitrariamente in M^n (le geodetiche – che per $\mathbb{R}^n$ sono segmenti di retta) e la sua curvatura, che qui non è la semplice curvatura di Gauss ma ha la natura di una quantità tensoriale (il tensore di Riemann).

Per affrontare la geometria degli spazi-tempo einsteiniani, è necessario ancora modificare un ingrediente cruciale nella definizione di varietà riemanniana. Diamo per noti i fondamenti della relatività speciale, per cui assumiamo in particolare il fatto che il tempo e le tre coordinate spaziali $x_0 = ct$, x_1, x_2, x_3 (c è la velocità della luce nel vuoto) descrivano i punti di un'unica arena, lo spazio degli eventi o spazio-tempo di Minkowski, vale a dire $\mathbb{R}^4$ dotato di una metrica η tale per cui $(\mathrm{d}s)^2 = -(\mathrm{d}x_0)^2 + (\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2 + (\mathrm{d}x_3)^2 = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x_\mu \mathrm{d}x_\nu$ (con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$)[3].

Allora, nella definizione precedente di varietà riemanniana di dimensione n = 4, lo spazio che modella localmente tale struttura non è più $\mathbb{R}^4$ con la metrica euclidea δ ma viene sostituito dallo lo spazio-tempo piatto ($\mathbb{R}^4$, η). Uno spazio-tempo lorentziano è una varietà M^4 dotata di un tensore metrico $g_{\mu\nu}$ per il quale elemento di linea quadrato $(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, \mathrm{d}x_\mu\, \mathrm{d}x_\nu$ (con $g_{\mu\nu}$ trasformabile, in ciascun punto della varietà, in $\eta_{\mu\nu}$, così come nel caso riemanniano g_{ab} è trasformabile in ogni punto in δ_{ab}[4]).

Storicamente il principio di relatività ha ispirato Einstein nello sviluppo di una teoria generale che includesse anche la gravitazione. A posteriori si può tuttavia affermare che il principio di equivalenza della relatività generale è una conseguenza della natura geometrica della teoria: in uno spazio-tempo curvo di tipo lorentziano i corpi in caduta libera (o 'gravitanti') seguono traiettorie geodetiche fornite dalla conoscenza dell'elemento di linea ds e, localmente, il moto è indistinguibile da quello di un osservatore accelerato nello spazio-tempo piatto di Minkowski.

Arriviamo dunque ad esprimere matematicamente il contenuto della descrizione di Wheeler della relatività generale; le equazioni di Einstein[5]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\,\pi\,G}{c^4}\,T_{\mu\nu}$$

Le quantità nel membro di sinistra sono geometriche: $g_{\mu\nu}$ è un tensore metrico lorentziano; $R_{\mu\nu}$ e R sono rispettivamente il tensore di Ricci e la curvatura scalare, ottenibili da un tensore di curvatura di rango quattro, espresso in termini di derivate (parziali) fino al secondo ordine rispetto alle $\{x_\nu \mid \nu = 0, 1, 2, 3\}$ del tensore metrico. A destra compare un'altra quantità tensoriale (il tensore energia-impulso) che descrive la densità e il flusso di materia ed energia, vale a dire l'insieme delle 'sorgenti' del campo gravitazionale. Il coefficiente davanti a $T_{\mu\nu}$ contiene c e G (la costante gravitazionale di Newton). Le equazioni vanno così interpretate: il tensore $T_{\mu\nu}$ è assegnato a livello fenomenologico, mentre l'incognita delle equazioni è costituita dal complesso delle 10 funzioni (non $16 = 4 \times 4$ come si penserebbe, a causa della simmetria) che rappresentano le componenti del tensore metrico $g_{\mu\nu}$ e che dipendono dalle coordinate locali $\{x_\nu\}$ assegnate ai punti dello spazio-tempo.

Tralasciando ulteriori dettagli matematici e sorvolando sulle numerose verifiche sperimentali della teoria di Einstein che si sono susseguite per un secolo, vogliamo ricordare come le equazioni nel vuoto (vale a dire senza i termini di sorgente a destra) predicano l'esistenza delle onde gravitazionali, esistenza non ancora verificata sperimentalmente in modo diretto e che costituisce una delle frontiere più avanzate della ricerca contemporanea nella fisica fondamentale.

Il calcolo di Regge può essere definito, a nostro avviso solo superficialmente, come una tecnica di 'approssimazione' della relatività generale mirata ad aggirare il difficile formalismo della geometria differenziale degli spazi-tempo curvi attraverso l'utilizzo di oggetti geometrico-combinatori che siano al contempo: a) più facili da caratterizzare dal punto di vista della loro struttura metrica intrinseca (una collezione di lunghezze, intese come distanze tra punti, sostituisce il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ dipendente dalle coordinate utilizzato finora); b) adatti ad essere utilizzati per trasformare le equazioni di Einstein (che contengono le derivate parziali seconde del tensore metrico) in un insieme di espressioni che dipendono solo da tali lunghezze e che risultino pertanto trattabili anche con metodi numerici.

La struttura combinatoria soggiacente è data dalla nozione di complesso simpliciale, definibile in ogni dimensione n come una collezione di simplessi, rappresentati e denominati in Figura 2.

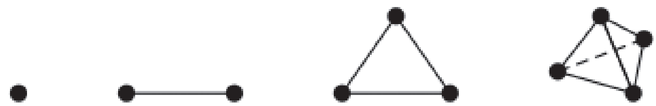


Figura 2. Uno 0-simplesso (vertice); un 1-simplesso (lato, spigolo); un 2-simplesso (triangolo); un 3-simplesso (tetraedro solido). In dimensione superiore si avrebbe un 4-simplesso (tesseratto).

Gli ingredienti geometrici sono forniti dal vincolo che all'interno di ogni simplesso (e dei suoi sotto-simplessi) la metrica sia piatta, e che valgano le regole di aggregazione dei simplessi: simplessi di dimensione n possono incollarsi solo lungo coppie di loro sotto-simplessi di dimensione (n – 1). Perché simplessi e non, ad esempio, quadrati o rettangoli e loro controparti n-dimensionali? La ragione è che solo i simplessi sono rigidi, e di conseguenza spazi costruiti con questo tipo di 'mattoni' sono caratterizzati completamente dal punto di vista metrico dando la collezione delle lunghezze $\{\ell_j\}$ di tutti i loro lati.

Nel caso quadridimensionale, richiedendo che la metrica all'interno di ogni 4-simplesso sia minkowskiana, otteniamo gli spazi-tempo 'sfaccettati' cui abbiamo alluso nel titolo: le varietà, o triangolazioni, di Regge, oppure, in un linguaggio più tecnico, le varietà simpliciali lineari a tratti.

Soffermiamoci a chiederci cosa abbiamo guadagnato rispetto alla trattazione illustrata in precedenza. Caratteristica cruciale del nuovo approccio, giustamente sottolineata nella scelta del titolo dell'articolo di Regge, è che le coordinate locali necessarie in geometria differenziale non ci sono più. Il principio di equivalenza relativistico è salvo, e anzi risulta palese poiché in ogni 4-simplesso la metrica è esattamente minkowskiana. Infine, se usassimo triangolazioni con lunghezze degli spigoli via via più piccole, arriveremmo a poter approssimare sempre meglio uno spazio-tempo lorentziano (continuo e liscio) soggiacente.

E la curvatura? Qui la risposta viene dal grande intuito matematico di Tullio Regge. In uno spazio triangolato n-dimensionale possiamo, come abbiamo detto, seguire un cammino all'interno di un n-simplesso σ_1^n, i = 1, ⋯, k, senza misurare alcuna curvatura; possiamo poi, passando attraverso un (n – 1)-simplesso comune, proseguire nel simplesso adiacente σ_2^n, sempre piatto. Se però attraversiamo una catena di n-simplessi adiacenti, diciamo $(\sigma_1^n, \sigma_2^n, \cdots, \sigma_k^n)$, fino a ritornare in σ_1^n, abbiamo in effetti circumnavigato un simplesso τ di dimensione (n – 2), sotto-simplesso comune a tutti questi σ^n. Gli oggetti di questo tipo sono chiamati da Regge *hinges* (giunti, cardini) e sono di fatto i portatori della curvatura, in quanto permettono di rivelare la presenza di un difetto angolare (*deficit*) rispetto all'angolo giro 2π. L'angolo di deficit $\varepsilon(\tau)$ associato a τ è infatti definito come la differenza $\varepsilon(\tau) = 2\pi - \sum_{i=1}^{k} \theta_i$, dove θ_i sono gli angoli diedrali formati dalle coppie di (n – 1)-simplessi (nella catena $(\sigma_1^n, \sigma_2^n, \ldots, \sigma_k^n)$) che condividono τ[6].

L'azione di Regge, vale a dire l'analogo per gli spazi-tempo triangolati quadri-dimensionali dell'azione di Hilbert-Einstein della relatività generale (nota 4), è data dall'espressione

$$S = \sum_\tau \epsilon(\tau)\ \mathrm{Area}(\tau),$$

dove la sommatoria va estesa a tutti i simplessi τ di dimensione (n – 2) (triangoli), $\varepsilon(\tau)$ è l'angolo di deficit associato a τ e l'ultimo termine, Area, non è altro che la somma delle aree dei triangoli che confluiscono in τ. Quindi, senza ricorrere al tensore di Riemann e all'associata curvatura R da integrare sulla varietà spazio-temporale continua, la quantità S esprime la curvatura stessa come una somma, pesata mediante le misure delle aree dei triangoli, degli angoli di deficit (rimandiamo alla Figura 3 per una comprensione intuitiva del concetto di curvatura di Regge).

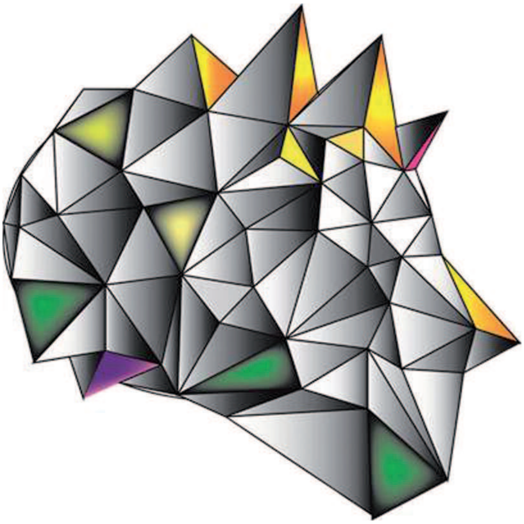


Figura 3. Un poliedro (irregolare) dissezionato in tetraedri euclidei è utile per illustrare come la curvatura di Regge sia definita per le superficie (nel caso concreto, la superficie del poliedro costituita dai triangoli). Guardando ai vertici, che rappresentano i portatori di curvatura nel caso di dimensione dei simplessi n = 2, si nota come in alcuni la somma degli angoli al vertice dei triangoli che vi concorrono sia minore di 2π, e pertanto la curvatura è positiva. In altri vertici, come l'ombreggiatura suggerisce, la superficie è curvata negativamente perché la somma degli angoli al vertice dei triangoli concorrenti supera 2π. Questa immagine aiuta dunque a visualizzare la controparte di Regge di una superficie curva generica, quale quella mostrata in Figura 1.

Notiamo infine che l'azione di Regge può essere riespressa, tramite semplici formule di geometria piana e di trigonometria, in termini delle lunghezze dei soli spigoli della triangolazione, vale a dire $S = S(\{\ell\})$. Come viene mostrato nell'articolo originale, anche le equazioni di Einstein-Regge si ottengono naturalmente applicando un principio variazionale a $S = S(\{\ell\})$.

Non possiamo dilungarci sulle innumerevoli applicazioni ed estensioni del calcolo di Regge, che spaziano dal suo utilizzo diretto nello studio di soluzioni cosmologiche e di sorgenti di interesse astrofisico, fino a una molteplicità di modelli di gravità quantistica ispirati dall'idea, resa concreta per la prima volta grazie a questo lavoro, di una ineludibile 'granularità' degli spazi-tempo. Di particolare attualità sono modelli accomunati dal concetto di gravità emergente: le geometrie spaziali o spazio-temporali, e perfino l'universo stesso in cui viviamo, potrebbero essere manifestazioni collettive di campi quantizzati che non sappiamo ancora descrivere bene matematicamente né misurare con accuratezza. Con la sua eleganza, semplicità e flessibilità il calcolo di Regge potrà forse ancora una volta indicarci la strada giusta.

Ringraziamenti

Un ringraziamento di cuore a Mauro Carfora per le figure.

Bibliografia

[1] Regge T., "General relativity without coordinates", *Nuovo Cimento* **19** (1961), 558-571.
[2] Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A., *Gravitation*, W.H. Freeman & Co. (1973), Capitolo 42. *Regge Calculus*.

NdR
Segnaliamo anche il seguente articolo:
Regge T., "La gravità discreta", *Le Scienze*, n. 331 (marzo 1996), pp. 48-54.

Note

[1] Mario Rasetti, cui avevamo chiesto di scrivere un ricordo scientifico di Tullio Regge, suo amico e collaboratore, ha subito acconsentito con entusiasmo alla nostra richiesta. Ci ha quindi fornito il presente contributo, scritto, insieme con la collega Annalisa Marzuoli, appositamente per i lettori della nostra rivista. Un sentito ringraziamento ad entrambi. Ringraziamo anche C. Agnes per il sostegno alla realizzazione di questa iniziativa.
Regge è stato ricordato in un incontro pubblico a Torino lo scorso novembre, nell'ambito della rassegna di divulgazione scientifica "Giovedì Scienza": una registrazione dell'evento è disponibile sul web al seguente indirizzo: http://www.giovediscienza.it/modules/conferenze/article.php?storyid=121.

Nel n. 4/2012 di LFnS è riportata una recensione (a cura di L. Brasini) di T. Regge, L'infinito cercare (autobiografia di un curioso), Einaudi 2012, autobiografia scritta insieme con S. Sandrelli. Nella prima di copertina dello stesso numero figura inoltre uno di quei disegni al computer di Regge, espressione grafica di algoritmi di calcolo ed equazioni, attraverso i quali egli amava esprimere giudizi ironici e a volte sarcastici. Il disegno, intitolato "Comitato di esperti" (Warning! Flying hot air balloons), rappresenta un insieme di palloni gonfiati. Sempre di attualità. [NdR].

2 I matematici italiani Luigi Bianchi (1865-1928), Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) e Tullio Levi Civita (1873-1941) avevano nel tempo elaborato in modo sofisticato i concetti di curvatura introdotti proprio da Gauss (1777-1855) e più tardi generalizzati e sistematizzati da Bernhard Riemann (1826-1866).

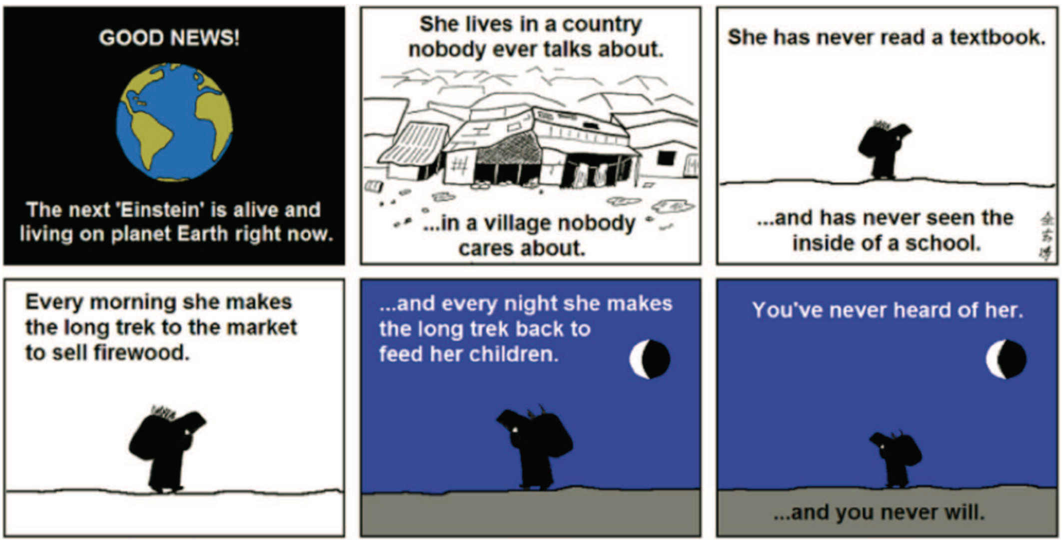
3 $(\mathrm{d}s)^2$ non è più necessariamente positivo: intervalli per cui $(\mathrm{d}s)^2 > 0$ sono chiamati di tipo spazio, quelli con $(\mathrm{d}s)^2 < 0$ sono di tipo tempo, e infine intervalli con $(\mathrm{d}s)^2 = 0$ sono di tipo luce.

4 Si noti che, nel caso lorentziano, si continua ad usare la lettera M per la varietà, i simboli g per la metrica e x per le coordinate (locali), in accordo alle notazioni correntemente adottate: la differenziazione viene codificata nell'uso di lettere greche per gli indici tensoriali, da intendersi sempre appartenenti all'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$. Spesso, per semplicità, si scelgono unità di misura tali che $c = 1$.

5 Come per la meccanica classica, le equazioni possono essere derivate da un semplice ed elegante principio variazionale in termini di una singola quantità, l'azione. In questo caso l'azione è quella di Hilbert-Einstein, definita come l'integrale, esteso alla varietà spazio-temporale, della curvatura scalare R.

6 Se n = 2, vale a dire se triangoliamo una superficie, τ è un punto (dimensione 0), vertice del complesso simpliciale e gli angoli θ_i non sono altro che gli angoli al vertice dei triangoli (simplessi bidimensionali) che hanno τ come vertice comune. Si intuisce facilmente che se $\varepsilon(\tau) < 0$ la curvatura in τ è positiva e se $\varepsilon(\tau) > 0$ negativa, mentre se $\varepsilon(\tau) = 0$ in τ la superficie è piatta.

EINSTEIN



Fonte: Abstruse Goose (Einstein: http://abstrusegoose.com/502)